

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Фізико-математичний факультет

ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Збірник наукових праць

ВИПУСК 1 (7)

Суми – 2015

**Друкується згідно з рішенням вченої ради фізико-математичного факультету
Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка**

Редакційна колегія

Ф.М. Лиман	доктор фізико-математичних наук, професор
В.С. Іваній	кандидат технічних наук, професор
М.В. Каленик	кандидат педагогічних наук, доцент
Т.Д. Лукашова	кандидат фізико-математичних наук, доцент
С.В. Петренко	кандидат фізико-математичних наук, доцент
А.О. Розуменко	кандидат педагогічних наук, доцент
О.В. Семеніхіна	кандидат педагогічних наук, доцент
О.Д. Стадник	кандидат фізико-математичних наук, доцент

Ф45 Фізико-математична освіта: 3б. наукових праць. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2015. – №1 (7). – 146 с.

До збірника увійшли наукові та методичні результати кваліфікаційних досліджень студентів 5-6 курсів фізико-математичного факультету Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка, які були представлені на звітній науковій конференції у квітні 2015 року.

Матеріали подаються в авторській редакції з позитивною рецензією наукового керівника.

ЗМІСТ

Секція 1. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ.....	5
Авраменко І.	5
ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПРИ РОЗВ`ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ.....	5
Бамбенкова Ю.	9
ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ	9
Безуглий Д.	15
ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЯК СУЧАСНА СТРАТЕГІЯ НАВЧАННЯ	15
Бондар І.	21
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ ЯК НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА	21
Гризун В.	24
КОЛА, ПОВ`ЯЗАНІ З ТРИКУТНИКОМ	24
Гурба А.	28
ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ХІМІЇ	28
Завалій Т.	33
ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ	33
Зубко В.	37
УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	37
Каца М.	41
ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА	41
Коропець Ю.	44
УСНІ ВПРАВИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ	44
Кушнерьов О.	50
ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ	50
Кушнерьов О.	56
РОЗФАРБОВУВАННЯ ГРАФІВ	56
Мащенко Г.	60
ФУНКЦІЇ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	60
Межирицька М.	68
ЗАДАЧІ НА АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ ПАРАМЕТР	68
Москальова О.	72
СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ З ОСОБЛИВИМИ ОСВІТНІМИ ПОТРЕБАМИ.....	72

Півень Н.....	77
ФОРМУВАННЯ ПІЗНАВАЛЬНОГО ІНТЕРЕСУ В УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ	77
Прасок А.....	81
ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ.....	81
Солошенко А.....	86
АДАПТАЦІЯ ПЕРШОКУРСНИКІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВНЗ	86
Ткаченко О.	90
ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМУЛА КОШІ, НАСЛІДКИ, ЗАСТОСУВАННЯ	90
Трохимець Д.....	94
ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ.....	94
Тхоренко А.	99
ОРГАНІЗАЦІЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ	99
Чайкіна Т.	104
ГЕОМЕТРІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ КЛАСИЧНОЮ ПОСЛІДОВНОСТЮ ФІБОНАЧЧІ	104
Чижикова Ю.	112
ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ» У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ	112
Шевченко С.....	115
ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАМЕНИТИХ ФУНКЦІЙ ДО ПОБУДОВИ КОНТРПРИКЛАДІВ	115
Шепель А.....	119
ДОВЕДЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	119
Секція 2. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ	124
Заточна А.....	124
КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ ЯК ФОРМА КОНТРОЛЮ	124
Шамрай С.....	129
УТОЧНЕННЯ ПЕРЕЛІКУ КОМП'ЮТЕРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ, НЕОБХІДНИХ ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ	129
Шевченко І.	139
ПРО ТЕХНОЛОГІЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ У ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ	139

Секція 1. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Ірина Авраменко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

ira.avramenko.92@mail.ru

Науковий керівник – О.В. Семеніхіна

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Формування умінь розв'язувати задачі на екстремум за допомогою похідної є одним із важливих завдань вивчення початків аналізу у старшій школі. Багато задач геометричного змісту є типовими задачами на екстремум. У цих задачах при виконанні певних умов треба знайти найбільше або найменше значення певної геометричної величини (периметра, площі, об'єму). Кожній з цих величин можна поставити у відповідність певну формулу (іноді не одну), яка виражає шукану величину як функцію інших величин. Проте сама функція в готовому вигляді не дається. Її треба визначити з умов задачі. Часто за умовами задачі можна побудувати функцію не однієї змінної, а двох. Тоді, застосувавши відомі геометричні теореми, одну з цих змінних виключають [3, с. 47].

Є чимало елементарних, досить простих і наочних, а іноді штучних, способів розв'язання задачі на екстремум. Проте використання апарату диференціального числення дає універсальний спосіб розв'язування задач такого типу:

- 1) вибір незалежної змінної і визначення множини її значень;
- 2) побудова функції, яка описує ту геометричну величину, екстремальне значення якої треба знайти;
- 3) відшукування критичних точок цієї функції і аналіз тих, які належать області визначення функції;
- 4) з'ясування характеру екстремуму функції в цих точках;
- 5) обчислення значень функції в цих точках і на кінцях відрізка області визначення з подальшим вибором найбільшого або найменшого з них.

Якщо неперервна функція диференційовна в інтервалі і має єдиний екстремум, то у випадку максимуму це буде її найбільше значення, а у випадку мінімуму – найменше [2].

Розглянемо приклад. З усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою c знайти той, у якого площа найбільша (рис. 1).

Розв'язання.

Якщо позначити через x і y катети трикутника, то з теореми Піфагора $y = \sqrt{c^2 - x^2}$, і площа трикутника, виражена через змінну x , буде мати вигляд $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$.

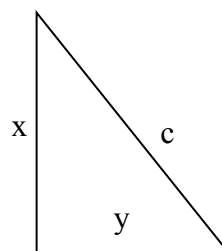


Рис. 1

Оскільки площа – невід’ємна величина, областю визначення функції $S(x)$ є відрізок $[0, c]$. Знайдемо похідну функції $S(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{x}{2} \sqrt{c^2 - x^2} \right)' = \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2 - x^2 - x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}},$$

$$\frac{c^2 - 2x^2}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Змісту задачі відповідає лише одна з цих точок: $\frac{c}{\sqrt{2}}$. З виразу похідної видно, що

$S'(x) > 0$ при $x < \frac{c}{\sqrt{2}}$, $S'(x) < 0$ при $x > \frac{c}{\sqrt{2}}$. А це означає, що $\frac{c}{\sqrt{2}}$ є точкою максимуму

функції $S(x)$, причому $S(\frac{c}{\sqrt{2}}) = \frac{c^2}{4}$. Крім того, $S(0) = S(c) = 0$, тому $S(x)$ у точці

$\frac{c}{\sqrt{2}}$ набуває найбільшого значення. Але при $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$, другий катет $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$, а це означає, що трикутник рівнобедрений.

Іншими словами, з усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою рівнобедрений має найбільшу площу.

Але, як показує практика, використання елементів диференціального числення при розв’язуванні задач на екстремум часто є складним, тому пропонуємо використати інший підхід і емпіричним способом одержати описаний результат. Для цього скористаємося спеціалізованими інформаційними засобами.

На сучасному етапі розвитку суспільства розроблено значну кількість програмних засобів, орієнтованих на підтримку вивчення математики. Ці засоби активізують навчально-пізнавальну діяльність учнів, підвищують інтерес дітей до вивчення математики. Вони забезпечують більшу повноту засвоєння матеріалу, триваліше його запам’ятовування і глибше розуміння. До таких засобів можна віднести програми динамічної математики, такі як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, GeoGebra тощо [4;5;7]. Ми зупинилися на вільно поширюваному середовищі GeoGebra, яке дає змогу реалізувати ще один підхід до розв’язування багатьох практичних задач на екстремум, який пов’язано з використанням таблиць значення функції та динамічним слідом точки.

Задамо параметр c у межах від 0 до 3. На довільній прямій відкладемо відрізок довжини c – це буде гіпотенуза наших прямокутних трикутників. Потім побудуємо коло з діаметром c , тоді усі трикутники зі стороною-діаметром і вершиною на колі будуть прямокутними. Візьмемо довільну точку на колі та інструментом *Многоугольник* побудуємо трикутник. Інструментами *Площадь* і *Расстояние или длина* будемо фіксувати площу та довжини сторін трикутника. Для знайдених довжин і площі та фіксованого параметра c через контекстне меню замовимо послугу *Запись в таблицу*, попередньо обравши полотно таблиць (рис. 2).

При зміні положення вершини прямого кута трикутника і фіксованому c спостерігаємо значення довжин сторін трикутника і відповідного їм значення площі. Найбільша площа трикутника при $c = 3$ відповідає однаковим сторонам-катетам і дорівнює 9см (рис. 2). При $c = 1,5$, $c = 2$ та інших фіксованих c маємо подібні висновки, тому справедливим буде припущення, що з усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою найбільша площа буде у рівнобедреному трикутнику (рис.3-4).

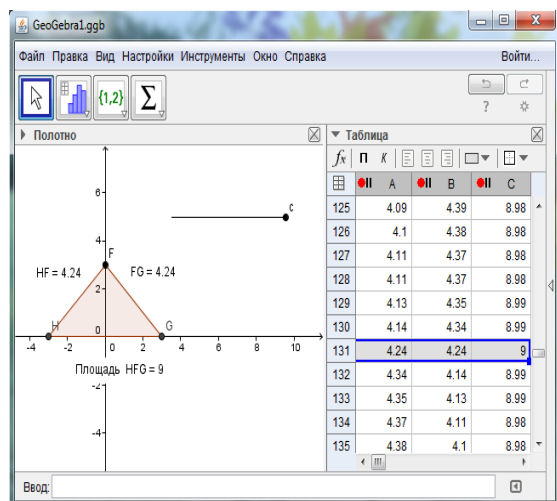


Рис. 2

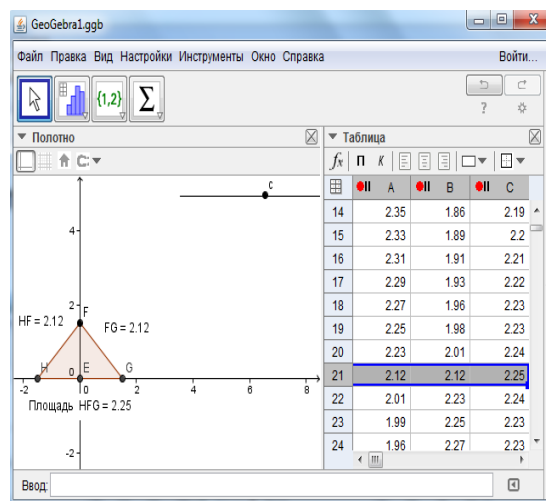


Рис. 3

Можливий і інший підхід до розв'язування цієї задачі пов'язаний з використанням інструментів *Локус* або *Оставлять след*.

Для цього після побудови трикутника, побудуємо точку L з координатами $\left(\sqrt{c^2 - x^2}, \frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}\right)$, де $\sqrt{c^2 - x^2}$ – сторона трикутника, а $\frac{1}{2}x\sqrt{c^2 - x^2}$ – значення площі, та замовимо для цієї точки послугу *Оставить след*. При зміні положення вершини F , яка рухається по колу, на екрані залишається слід, який описує криву, схожу на параболу (рис. 5). Максимум досягається, коли точка F лежить на Oy , а це означає, що трикутник буде рівнобедреним. Такий висновок знову можна зробити для будь-яких значень параметра c .

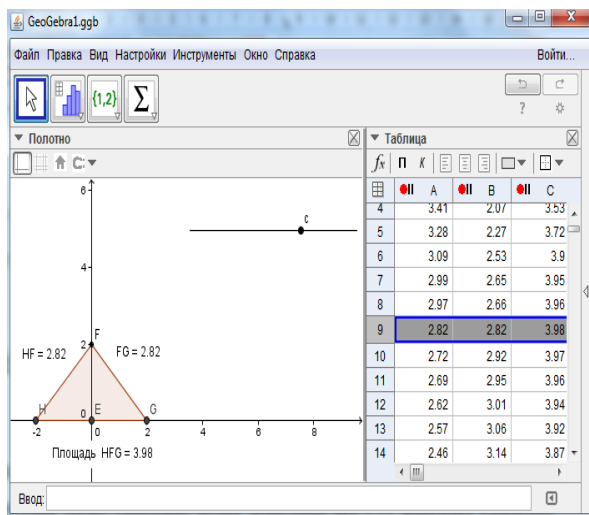


Рис. 4

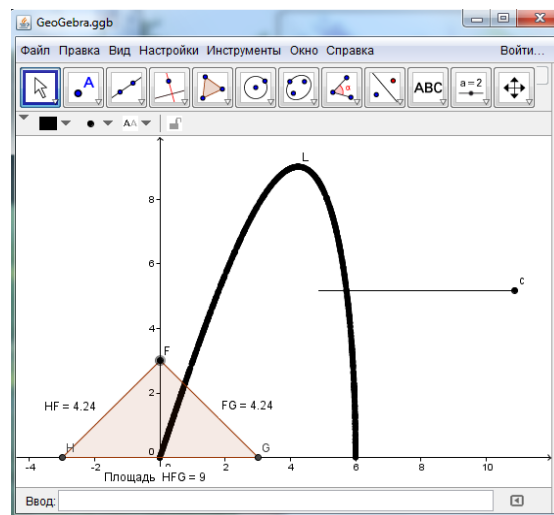


Рис. 5

Розв'язування задач такого типу з одного боку знайомить учнів з спеціалізованими середовищами математичного спрямування GeoGebra та шляхами його використання в розв'язанні математичних задач, а з іншого боку дозволяє емпіричним шляхом одержати результат, який раніше можна було одержати лише аналітично.

Застосування описаного підходу дозволяє вчителю математики одночасно підвищити зацікавленість у вивченні математики і сприяти накопиченню в учнів емпіричного досвіду розв'язування математичних задач та інтуїції [6].

Список використаних джерел

1. Динамічне геометричне середовище GeoGebra [Електронний ресурс]. – [Режим доступу]: <http://te.zavantag.com/docs/1040/index-31012-1.html?page=3>
2. Задачі на екстремум в планіметрії та стереометрії [Електронний ресурс]. – [Режим доступу]: http://5ka.at.ua/load/matematika/zadachi_na_ekstremum_v_planimetriji_ta_stereometriji_referat/36-1-0-11967
3. Мельник В. Геометричні задачі на екстремуми / В. Мельник // Математика в школі. – 2000. – № 4. – С. 56.
4. Застосування комп'ютера при вивченні математики: [навчальний посібник] / Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. – Суми, 2014. – 179 с. (електронний ресурс)
5. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики і методичні проблеми їх використання [Електронний ресурс] / Семеніхіна Олена Володимирівна, Друшляк Марина Григорівна // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Том 42, № 4. – С. 109-117. – Режим доступу: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1055/813#.VDPbk2d_vE4
6. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Створення власних комп'ютерних інструментів у середовищах динамічної математики / Олена Семеніхіна, Марина Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – №5. – С. 60-69.
7. Elena Semenikhina, Marina Drushlyak. Computer Mathematical Tools: Practical Experience of Learning to use them // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(9), № 3. – Pp. 175-183.

Анотація. Авраменко І. Особливості використання середовища GeoGebra при розв'язуванні задач на екстремум.

У роботі на прикладі продемонстровано емпіричний підхід до розв'язування задач на екстремум та із застосуванням середовища GeoGebra. При цьому використано полотно таблиць та інструмент Динамічний слід.

Ключові слова: задачі на екстремум, динамічна геометрія, середовище GeoGebra.

Summary. Avramenko I. Features of GeoGebra in solving environmental problems on extreme.

In this paper demonstrated empirical approach to solving task of extremum and application environment GeoGebra. Used canvas of tables and tool Dynamic track.

Keywords: problem on the extreme, dynamic geometry environment GeoGebra.

Юлія Бамбенкова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
Науковий керівник – Ф.М. Лиман

ЗАСТОСУВАННЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

1. Використання ланцюгових дробів до розв'язування діофантових рівнянь

Історія введення й застосування ланцюгових дробів починається зі способу добування арифметичних квадратних коренів, що застосовувався в стародавньому Вавилоні. Розв'язуванням невизначених рівнянь першого степеня в цілих числах займалися Діофант, індійські вчені, а також учені народів Середньої Азії. Деякі такі рівняння з двома і трьома невідомими з'явилися у зв'язку з проблемами, що виникли в астрономії, наприклад у зв'язку з проблемою визначення періодичності повторення небесних явищ. Після Баше де Мезіріака в VII і VIII ст. різні правила для розв'язання невизначеного рівняння першого степеня з двома невідомими в цілих числах давали відомі математики Роль, Ейлер та інші.

Означення. Діофантовим рівнянням називають алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами, розв'язки якого треба знайти у цілих числах.

Загального способу розв'язання діофантових рівнянь не існує. Це було встановлено у 1972 році Матіасевичем, який дав негативну відповідь на відому 10-у проблему Гільберта. Однак існує велике число конкретних способів розв'язання тих або інших діофантових рівнянь. Розглянемо деякі з них.

Нехай

$$ax + by = c. \quad (1)$$

Якщо $a \neq 0, b \neq 0$, то рівняння (1) неозначене і має безліч розв'язків. Загальний розв'язок цього рівняння:

$$x = \frac{c - by}{a} \quad \text{або} \quad y = \frac{c - ax}{b}.$$

Припустимо, що у рівнянні (1) $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Необхідно знайти цілі розв'язки рівняння (1), тобто розв'язки, які складаються з цілих чисел.

Нехай d – найбільший спільний дільник чисел a, b : $d = (a, b)$. Якщо вільний член рівняння (1) c не ділиться на $d = (a, b)$, то рівняння не має цілих розв'язків.

Якщо $c : d = (a, b)$, то поділивши обидві частини рівняння (1) на $d = (a, b)$, отримаємо рівняння, рівносильне даному, коефіцієнти якого є взаємно прості числа.

Теорема 1. [1] Якщо $(x_1; y_1)$ – пара цілих чисел, що задовольняє рівняння (1), де $(a, b) = 1$, то загальний розв'язок цього рівняння в цілих числах можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x = x_1 + bt, \\ y = y_1 - at. \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Доведення. За умовою теореми маємо $ax_1 + by_1 = c$. Почленно віднімемо рівність $ax_1 + by_1 = c$ від рівності (1.15). Отримаємо:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

Звідси

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

Оскільки, за умовою $(a, b) = 1$, то $\begin{cases} y - y_1 = -at, \\ x - x_1 = bt. \end{cases} \quad t \in Z$

Маємо

$$\begin{cases} x = x_1 + bt, \\ y = y_1 - at. \end{cases}$$

■

Отже, розв'язки рівняння (1) в цілих числах зводяться до знаходження окремого розв'язку цього рівняння.

Теорема 2. [3] *Загальний розв'язок у цілих числах рівняння (1), де $a, b, c \in Z$ і $(a, b) = 1$, можна подати у вигляді:*

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1} \cdot c \cdot q_{n-1} + bt, \\ y = (-1)^n \cdot c \cdot p_{n-1} - at, \end{cases}$$

де $t \in Z, p_{n-1}, q_{n-1}$ – чисельник і знаменник ланцюгового дробу $\frac{a}{b}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння у цілих числах

$$-117x + 343y = 119$$

Розв'язання. $117(-x) + 343y = 119$

$$\frac{a}{b} = \frac{117}{343},$$

$$\left[\frac{117}{343} \right] = 0.$$

Використаємо алгоритм Евкліда:

$$343 : 117 = 2 \text{ (ост. } 109\text{)};$$

$$117 : 109 = 1 \text{ (ост. } 8\text{)};$$

$$109 : 8 = 13 \text{ (ост. } 5\text{)};$$

$$8 : 5 = 1 \text{ (ост. } 3\text{)};$$

$$5 : 3 = 1 \text{ (ост. } 2\text{)};$$

$$3 : 2 = 1 \text{ (ост. } 1\text{)};$$

$$2 : 1 = 2 \text{ (ост. } 0\text{)}.$$

$$\frac{117}{343} = [0; 2, 1, 13, 1, 1, 2].$$

У даному випадку $n = 7$, отримаємо $p_{n-1} = p_6 = 44, q_{n-1} = q_6 = 129$

$$\frac{p_6}{q_6} = \frac{117}{343} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}}} = \frac{44}{129}.$$

Отримані значення підставимо у систему (1.17), отримаємо:

$$\begin{cases} -x_0 = (-1)^6 \cdot 119 \cdot 129 + 343t, \\ y_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 44 - 117t. \end{cases} \quad t \in Z$$

$$\begin{cases} -x_0 = 15351 + 343t, \\ y_0 = -5236 - 117t. \end{cases} \quad t \in Z$$

$$\begin{cases} x_0 = -15351 - 343t, \\ y_0 = -5236 - 117t. \end{cases} \quad t \in Z$$

Ми дістали великі за абсолютною величиною частинні значення x_0, y_0 , але з загального розв'язку легко дістати окремі значення для x і y , які будуть найменші за абсолютною величиною. Покладемо $t = -45$.

$$\begin{cases} x_1 = -15251 - 343 \cdot (-45) = -15351 + 15435 = 84, \\ y_1 = -5236 - 117 \cdot (-45) = -5236 + 5265 = 29. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 84, \\ y_1 = 29. \end{cases}$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x = 84 + 343t, \\ y = 29 - 117t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що у даному прикладі можна було б одразу визначити x і y , розклавши дріб $-\frac{117}{343}$ у ланцюговий.

$$\left[-\frac{117}{343} \right] = -1.$$

Використаємо алгоритм Евкліда:

$$343 : 226 = 1 \text{ (ост. 117)};$$

$$226 : 117 = 1 \text{ (ост. 109)};$$

$$117 : 109 = 1 \text{ (ост. 8)};$$

$$109 : 8 = 13 \text{ (ост. 5)};$$

$$8 : 5 = 1 \text{ (ост. 3)};$$

$$5 : 3 = 1 \text{ (ост. 2)};$$

$$3 : 2 = 1 \text{ (ост. 1)};$$

$$2 : 1 = 2 \text{ (ост. 0)}.$$

$$-\frac{117}{343} = [-1; 1, 1, 1, 13, 1, 1, 1, 2].$$

У даному випадку $n = 8$, отримаємо $p_{n-1} = p_7 = -44, q_{n-1} = q_7 = 129$

$$\frac{p_7}{q_7} = -\frac{117}{343} = -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}}}} = -\frac{44}{129}.$$

Отримані значення підставимо у систему, отримаємо:

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^7 \cdot 119 \cdot 129 + 343t, \\ y_0 = (-1)^8 \cdot 119 \cdot (-44) + 117t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x_0 = -15351 + 343t, \\ y_0 = -5236 + 117t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 84 + 343t, \\ y = 29 + 117t. \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

2. Доведення трансцендентності чисел π та e

Сучасна математика в багатьох задачах оперує множиною дійсних чисел, що складається з підмножин раціональних і ірраціональних чисел, тобто з чисел які можна представити у вигляді скінченного алгебраїчного дробу й чисел, які не можна представити у даному вигляді. Особливою підмножиною ірраціональних чисел є

трансцендентні числа, тобто такі числа, які не є коренями ніякого многочлена з цілими коефіцієнтами.

Існування і явні побудови дійсних трансцендентних чисел обґрунтував французький учений Ж. Ліувіль на основі поміченого ним факту, що ірраціональні алгебраїчні числа не допускають «дуже сильних» наближень раціональними числами. Французький учений Е. Борель встановив, що «майже всі» ірраціональні числа трансцендентні.

Теорема 3. [2] Число π трансцендентне.

Доведення. Припустимо протилежне, що π – алгебраїчне число степеня $v, v \geq 1$. Покладемо $m = v + 1$ і з даним значенням m розглянемо розклад функції $\sin \pi z$ в інтерполяційний ряд Ньютона:

$$\sin \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Для коефіцієнтів A_n даного розкладу виконується оцінка зверху, тобто

$$|A_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi n \frac{e^{\pi n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}} = \frac{e^{\pi n + (n+1) \ln 2}}{n^n} < e^{5n} n^{-n}. \quad (2)$$

З іншого боку, має місце наступна рівність

$$r! M^{n-1} A_n = P_n(\pi),$$

де $P_n(x)$ – многочлен з цілими раціональними коефіцієнтами степеня k і висоти H , де

$$k \leq r, H \leq r! (2M)^n. \quad (3)$$

Нехай c, c_1, c_2 додатні константи, які залежать лише від числа v .

За теоремою про існування постійної константи $c > 0$, в силу припущення, що π – алгебраїчне число степеня v , виконується або рівність $P_n(\pi) = 0$, або нерівність

$$|P_n(\pi)| \geq \frac{c^k}{H^{v-1}} = e^{k \ln c - (v-1) \ln H}. \quad (4)$$

Якщо $P_n(\pi) \neq 0$, то з нерівностей (2) та (3) отримаємо оцінку

$$|P_n(\pi)| \geq y^{-|\ln c|k - (v-1)(r \ln r + n \ln(2M))}. \quad (5)$$

Але з умови $r_1 - 1 \leq r_m \leq r_{m-1} \leq \dots \leq r_1 \leq \frac{n}{m}$ маємо, що

$$r = \max_{1 \leq k \leq m} r_k \leq \frac{n}{m},$$

а $m = v + 1$. Тому з нерівності (4) слідує оцінка

$$|P_n(\pi)| > e^{\frac{m-2}{m} n \ln n - c_1 n}. \quad (5)$$

З рівності $r! M^{n-1} A_n = P_n(\pi)$ і нерівності (2) отримаємо, що

$$|P_n(\pi)| < e^{5n - n \ln n + (n-1) \ln M + r \ln r} < e^{\frac{m-1}{m} n \ln n + c_2 n}. \quad (6)$$

Нерівності (5) та (6) при достатньо великому n суперечливі. Значить, існує число n_0 таке, що $A_n = 0$ при всіх $n \geq n_0$, а функція $\sin \pi z$ повинна бути многочленом. Але вона не є многочленом, тому що має нескінченне число нулів. Отже, отримали протиріччя, тобто π – трансцендентне число. ■

Теорема 4. [2] Число e трансцендентне.

Доведення. Припустимо протилежне, що e – алгебраїчне число степеня m . Тоді виконується рівність

$$a_m e^m + \dots + a_1 e + a_0 = 0, a_0 \neq 0, \quad (7)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_m$ – цілі раціональні числа.

Розглянемо тотожність Ерміта

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} ((x-1) \dots (x-m))^n, \quad (*)$$

де n – достатньо велике натуральне число. Складемо рівність

$$F(0)e^k - F(k) = e^k \int_0^k f(t)e^{-t} dt$$

для значень $k = 0, 1, \dots, m$, помноживши їх відповідно на a_k . Так як виконується рівність (7), то в результаті отримаємо, що

$$-\sum_{k=0}^m a_k F(k) = \sum_{k=0}^m a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t} dt. \quad (8)$$

Покажемо, що при деякому достатньо великому n ліва частина рівності (8) буде відмінна від нуля цілим числом, а його права частина за абсолютною величиною менше 1. Тоді ця рівність буде суперечливою, і теорема буде доведена.

Так як многочлен $f(x)$ має число 0 коренем кратності $(n-1)$, а числа $1, \dots, m$ – коренями кратності n , то

$$f^{(l)}(0) = 0, l = 0, 1, \dots, n-2, \quad (9)$$

$$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn} (m!)^n \quad (10)$$

$$f^{(l)}(k) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (11)$$

За лемою коефіцієнти похідної порядку l многочлена $x^{n-1}((x-1) \dots (x-m))^n$ є цілі числа, які діляться на $l!$. Отже, всі похідні $f^{(l)}(k)$ при $l \geq n$ мають цілі коефіцієнти, що діляться на число n .

Тому з рівностей (9) та (10) отримаємо, що

$$F(0) = \sum_{l=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(0) = (-1)^{mn} (m!)^n + nA, A \in Z, \quad (12)$$

а з рівності (11) маємо, що

$$F(k) = \sum_{l=n}^{(m+1)n-1} f^{(l)}(k) = nB_k, B_k \in Z, k = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Нехай число n задовольняє умовам

$$(n, m!) = 1, n > |a_0|. \quad (14)$$

Тоді з рівностей (12) та (13) маємо, що всі доданки в лівій частині рівності (8) є цілими числами, при чому $a_0 F(0)$ не ділиться на n , а всі інші доданки $a_k F(k)$ діляться на n . Звідси слідує, що ліва частина рівності (8) відмінна від 0 ціле число і, значить,

$$\left| \sum_{k=0}^m a_k F(k) \right| \geq 1. \quad (15)$$

Оцінимо праву частину рівності (8). На відрізку $0 \leq x \leq m$ кожний співмножник $(x-k), 0 \leq k \leq m$, що входить в добуток (*), не перевищує по модулю числа m . Тобто, справедлива наступна оцінка

$$|f(x)| < \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!}, \quad 0 \leq x \leq m,$$

а тоді

$$\left| \sum_{k=0}^m a_k e^k \int_0^k f(t) e^{-t} dt \right| < \frac{m^{(m+1)n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^m |a_k| e^k \int_0^k e^{-t} dt < \frac{m^{(m+1)n}}{(n-1)!} e^m \sum_{k=0}^m |a_k|$$

$$= c_0 \frac{c^n}{(n-1)!}, \quad (16)$$

де константи c_0 і c не залежать від числа n .

З рівності (8), умов (14-16) отримаємо, що

$$1 \leq \left| \sum_{k=0}^m a_k F(k) \right| < c_0 \frac{c^n}{(n-1)!}. \quad (17)$$

Права частина нерівності (17) прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$. Виберемо число n так, щоб виконувалась умова (14) і нерівність

$$c_0 \frac{c^n}{(n-1)!} < 1.$$

Тоді нерівність (17) суперечлива, і теорема доведена. ■

Список використаних джерел

1. Бородін О. І. Теорія чисел. / О. І. Бородін. – К.: Вища школа, 1970. – 275 с.
2. Галочкин А. И. Введение в теорию чисел. / А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А.Б.Шидловский. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 152 с.
3. Окунев Л. Я. Краткий курс теории чисел. / Л. Я. Окунев. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1956. – 239 с.

Анотація. Бамбенкова Ю. Застосування ланцюгових дробів.

У статті розглянуто означення діофантових рівнянь та використання ланцюгових дробів до їх розв'язання. Також розглянули теореми на доведення трансцендентності деяких чисел.

Ключові слова: діофантові рівняння, загальний розв'язок, ланцюгові дроби, алгебраїчні та трансцендентні числа.

Summary. Bambenkova J. The use of continued fractions.

The article considers the definition of Diophantine equations and using continued fractions to solve them. Also considered in theorem proving transcendence of of certain numbers.

Keywords: Diophantine equations, general solution, continued fractions, algebraic and transcendental numbers.

Дмитро Безуглий*Сумський державний педагогічний експеримент імені А.С. Макаренка**dimon.bez.93@mail.ru**Науковий керівник – О.В. Семеніхіна*

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЯК СУЧАСНА СТРАТЕГІЯ НАВЧАННЯ

Проблема візуалізації в навчально-виховному процесі, її роль, функції, способи застосування для вирішення низки дидактичних проблем, порівняно з іншими педагогічними проблемами, є мало дослідженою. Але усі дослідники підтверджують, що використання візуалізації є дуже ефективним в процесі навчання.

Термін «візуалізація» (від лат. Visualis – зоровий) означає те, що сприймається за допомогою зору, є наочним. В свою чергу, візуальні спостереження – це ті спостереження, які проводяться за допомогою спеціальних оптичних приладів або неозброєним оком. Такі спостереження видимого дидактичного засобу є пасивним процесом, в результаті якого учні знаходяться «поза» об'єктом дослідження, вивчають його ніби зі сторони, не маючи можливості змінити його, а лише спостерігають за ним.

Інше означення візуалізації представляється в концепціях таких вчених як Андерсон, Бартлетт, Фоклер, Мінський та інші. У них цей феномен трактується як винесення з внутрішнього плану на зовнішній мислених образів в процесі пізнавальної діяльності, причому форма цих образів стихійно визначається за допомогою механізму асоціативної проекції.

В даному означенні присутні два аспекти:

- 1) винесення мислених образів з внутрішнього плану на зовнішній;
- 2) стихійне визначення форми мислених образів.

Окрім зорового сприйняття людина наділена здатністю до візуалізації. Її особливістю є перенесення на зовнішній план із внутрішнього плану результатів інтелектуально-розумової діяльності. Процес «перенесення», який супроводжується «переходом» мислеобразів з внутрішнього плану в зовнішній є проекцією психічного образу. Зі слів Л.М. Веккера, «проекція образу полягає саме в зображенні об'єкта, який знаходиться у зовнішній по відношенню до носія зображення області простору» [2].

Якщо цілеспрямовано розглядати навчання як процес і результат взаємодії внутрішнього і зовнішнього планів, то візуалізація служить головним механізмом, який забезпечує діалог між зовнішнім і внутрішнім планами діяльності. Даний механізм є дуже важливим з позицій підвищення пізнавального інтересу і організації процесу пізнання для всіх учнів із сформованим візуальним каналом.

На підтримку тези про важливість використання візуальної підтримки під час навчання говорять наступні аргументи.

1. В епоху інформаційного суспільства до 90% інформації передається візуальними каналами, оскільки відбулися значні зміни в засобах, які реалізують унаочнення інформації і які вплинули на організацію навчально-виховного процесу та його вихідні результати. Але можливості візуалізації у галузі освіти реалізуються ще не у повній мірі.

2. Якісні зміни, які відбувалися в освіті протягом століть, спричинені виникненням писемності, друкарства, книговидання, розробкою дидактичних матеріалів, розвитком мережі Інтернет та інформаційних технологій в цілому, дистанційних форм навчання та різних інновацій в області розробки засобів обміну інформації, основою яких є зорове сприйняття та візуальне мислення.

3. Завдяки можливостям візуалізації великі обсяги інформації можна представляти у лаконічній, згорнутій, зручній і логічній формі, що в свою чергу сприяє інтенсифікації навчання.

4. Механізми вербально-логічного та чуттєво-образного відображення не спроможні дати можливість дитині уявити такі властивості, як наприклад, дії у візуальній формі, саме тому пізнавальні процеси повинні спиратися на когнітивно-візуальні форми відображення знань. Через це і виникає інтенсивний пошук візуальних засобів передачі знань (знаки, символи, схеми, графи, матриці, таблиці тощо), які б забезпечували і стимулювали виконання психічно-пізнавальних процесів (сприйняття, запам'ятовування, відтворення інформації) на високому рівні і активізували процес навчання.

Розмаїття форм засобів візуалізації, які швидко зародилися, створило передумови для їхнього раціонального використання в галузі освіти з метою активізації навчальної діяльності учнів. Більша кількість навчальних візуальних засобів (конспекти, схеми, моделі тощо) відрізняються за наступними критеріями:

- обсягом представленої інформації і складністю роботи з нею;
- можливістю систематизації ключових понять теми, яка вивчається, і їх деталізацією;
- смисловими (змістовими) і логічними (функціональними) компонентами представлення знань і дій.

За допомогою підтримки і супроводу навчання різними способами і прийомами аналізу і відображення знань у візуальній формі навчання стає у більшій мірі керованим, інструменталізованим, проектно-модельним, прогнозованим, що дає змогу отримувати стійкі і передбачувані наперед результати навчання.

Основна мета візуалізації в навчанні – підтримка логічних операцій на всіх етапах навчальної діяльності, а найголовніше при виконанні аналітичних дій (аналіз, синтез, порівняння, пошук зав'язків і відношень, систематизація, висновки тощо).

Серед функцій візуалізації також виділяють розвиток фантазії, концентрацію уваги, асоціативність мислення та інші (рис. 1).

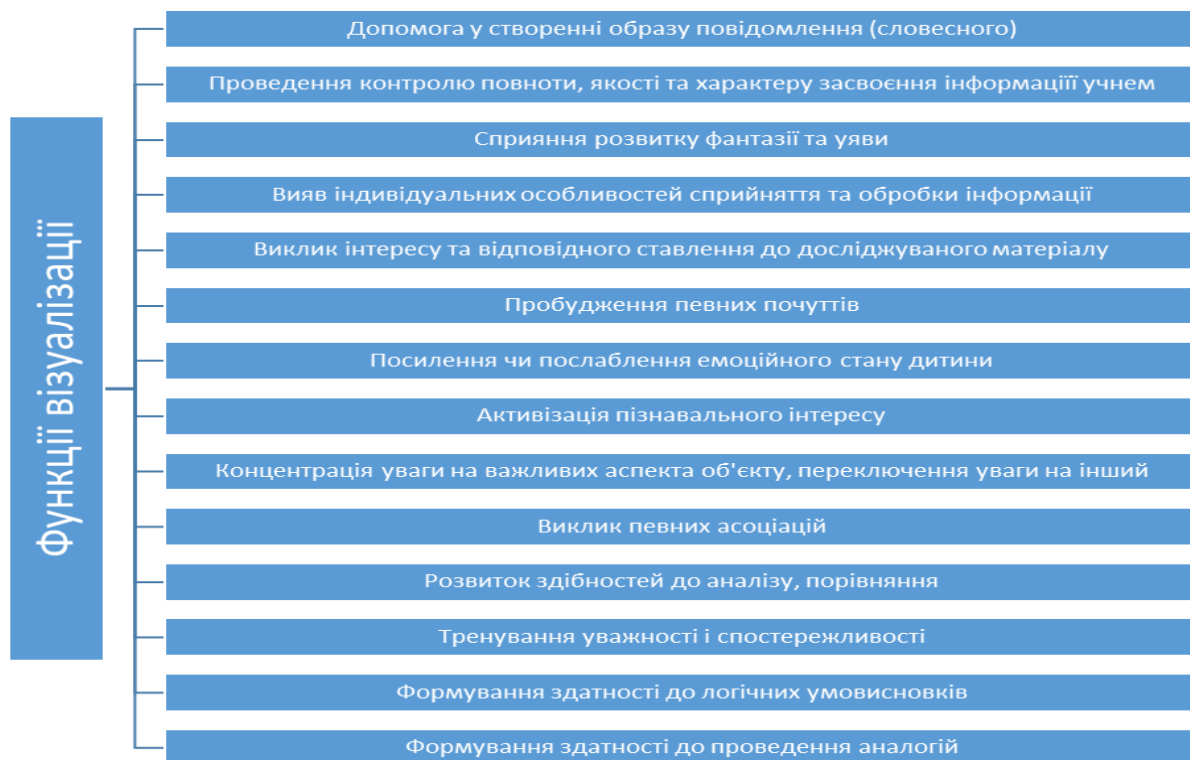


Рис. 1

На даний момент в освіті є перспективним застосування когнітивної візуалізації дидактичних об'єктів. Під цим поняттям маються на увазі фактично всі існуючі види візуалізації педагогічних об'єктів.

В практичній же діяльності для підтримки візуалізації використовують багато методів структурування – від канонічних діаграм і графів (рис. 2) до «дорожніх карт» (рис. 3), так званих «променевих схем-павуків», «каузальних ланцюгів» та «інтелектуальних карт» (рис. 4).



Рис. 2



Рис. 3

На нашу думку, найбільшу кількість (обсяг) інформації несуть у собі структурно-логічні схеми типу інтелект-карт. Вони характеризуються певною універсальністю та інтегративністю. Їх побудова ґрунтується на виявленні зв'язків між елементами знань і аналітико-синтетичної діяльності в процесі переведення вербальної інформації в невербальну. Поетапне розгортання логічного ланцюга думок або поняття, від головного елемента до підпорядкованих, опис образів, а також операції по передачі інформації вербальним шляхом формують продуктивні способи мислення, які стали вкрай необхідними при сучасних темпах інформатизації суспільства, розвитку науки, техніки, технологій.



Рис. 4

Структурно-логічні схеми є особливо наочними. В них елементи зображені в нелінійному вигляді з виділеними логічними зв'язками між ними. Такий вид наочності спирається на структуру і асоціативні зв'язки, які є характерними для довготривалої пам'яті людини. Як стверджує А.А. Вербицький структурно-логічні схеми є певною сполучною ланкою між текстовим матеріалом підручника (зовнішній лінійний вміст) і образом, створеним людиною в свідомості (внутрішній нелінійний вміст). Такі схеми мають переваги в тому, що вони виконують функцію об'єднання понять у певні системи [1]. Самі одиничні поняття в повній мірі не можуть нічого сказати про зміст предмету навчання, але коли вони об'єднані в певну систему, вони розкривають структуру, його зміст. Розуміння та осмислення нового виникає тоді, коли мозок опирається на попередні знання та уявлення.

Саме це і ініціює необхідність в постійній актуалізації попередньо отриманого досвіду і знань, для пізнання, розуміння і усвідомлення нового. Можна сказати, процес вивчення нового матеріалу – це сприймання та переробка нової інформації завдяки співставленню її з уже відомими поняттями і фактами засобами інтелектуальних операцій. Інформація, яка поступає в мозок, структурується та створює у свідомості зв'язки. Нова інформація зв'язується з уже створеними когнітивними схемами, перетворює їх і формує нові когнітивні зв'язки, схеми та інтелектуальні операції. При цьому встановлюються зв'язки між вже відомими поняттями та способами дій і новими знаннями [3].

При візуалізації навчального матеріалу слід прийняти до уваги, що наочні образи скорочують словесне висловлення, тим самим ущільнюють інформацію.

Іншим важливим аспектом використання візуальних дидактичних засобів є вибір оптимального, раціонального співвідношення словесної, символічної інформації і наочних образів. Візуальне мислення і понятійне мислення завжди перебуває у постійній взаємодії. Вони в повній мірі допомагають розкрити зміст поняття, процесу або явища з різних сторін. Словесно-логічне мислення дає можливість більш точно сприйняти дійсність, але це відображення абстрактне. В свою чергу, візуальне мислення допомагає організовувати образи, систематизувати їх, структурувати і робити їх цілісними.

Нами здійснено додатково аналіз програмного забезпечення стосовно підтримки ідей візуалізації. Зокрема проведено аналіз середовищ по створенню інтелект-карт [4]

та створено подібні карти для підтримки вивчення тем «Інтерполяція» (рис. 5) та «Методи розв'язування нелінійних рівнянь» (рис. 6), які частково вивчаються у профільних математичних класах. Наш досвід використання програм щодо створення інтелект-карт дозволяє рекомендувати середовище XMind, оскільки даний програмний засіб є відкритим, встановлюється на різні ОС, має зручний інтерфейс з великим переліком функцій і форматів файлів, з якими може працювати дана програма.

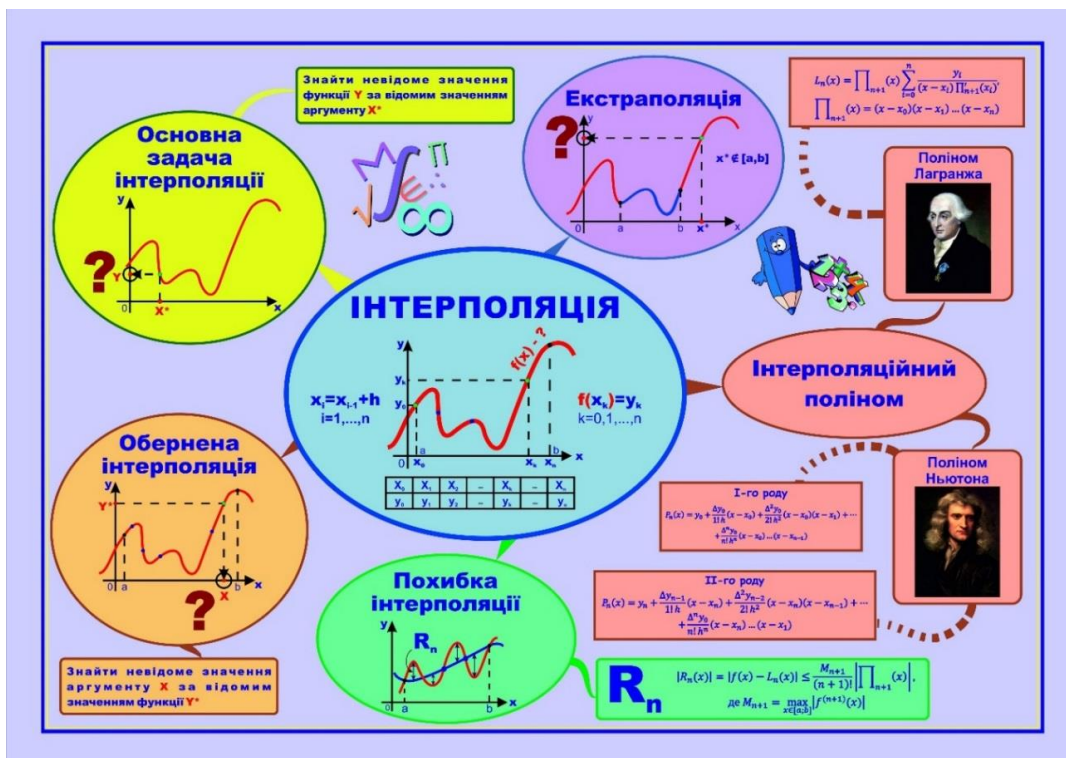


Рис. 5

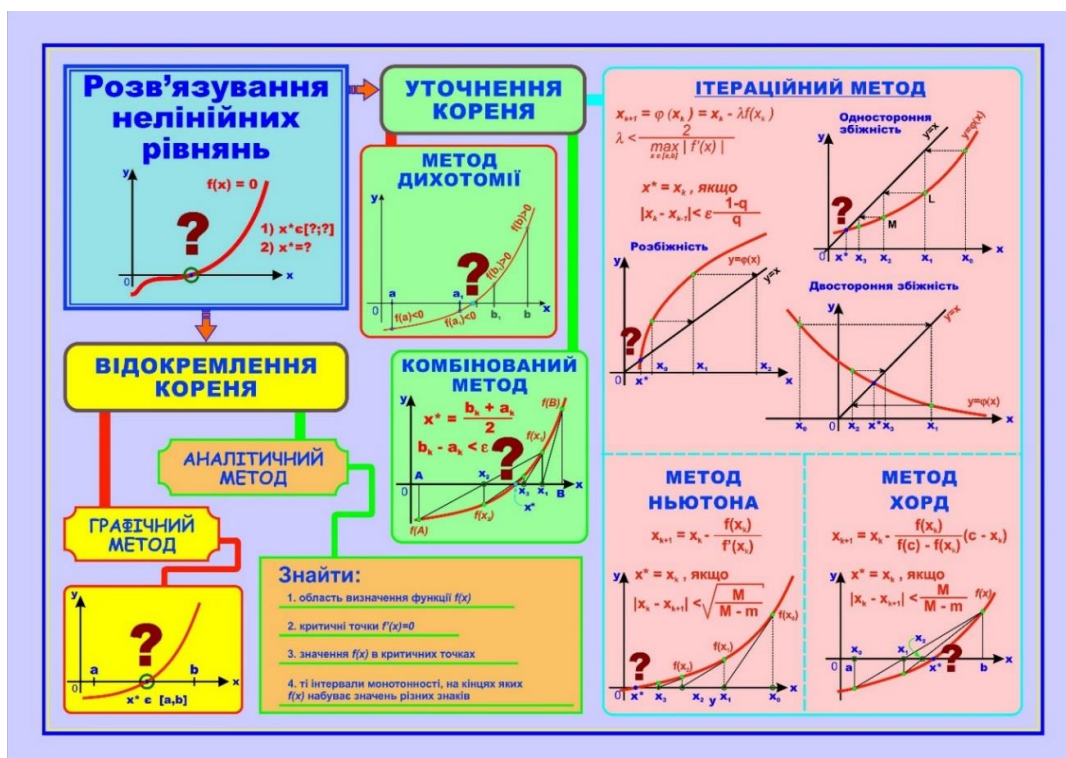


Рис. 6

Проведене дослідження також підтвердило, що візуалізація інформації є дуже важливою складовою дидактичного процесу. На основі когнітивно-візуальних підходів можливе не лише представлення великої кількості даних у стислій, лаконічній формі, але й більш продуктивна навчальна діяльність, активізація пізнавального інтересу та розвиток асоціативного мислення, перенесення методів опрацювання інформації на різні об'єкти і сфери суспільства. Іншими словами, в епоху інформаційної революції візуалізація стає провідною стратегією у використовуваних технологіях навчання.

Список використаних джерел

1. Вербицкий, А. А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход / А.А.Вербицкий. – М.: Высш. шк., 1991. – 207 с.
2. Лаврентьев Г.В. Инновационные обучающие технологии в профессиональной подготовке специалистов / Г.В.Лаврентьев, Н.Б.Лаврентьева, Н.А. Неудихина. – М: Педагогика, 2004. – С. 14-17.
3. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учеб. пособ. — М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
4. Безуглий Д. Огляд програмного забезпечення для створення інтелект-карт / Матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції «Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця» (НПК-2014), м. Суми, 3-4 грудня 2014 р. – Суми : ВВП «Мрія», 2014. – Том 1. – С.126-127.
5. Семеніхіна О., Юрченко А. Уміння візуалізувати навчальний матеріал засобами мультимедіа як фахова компетентність учителя // Науковий вісник Ужгородського національного університету: Серія «Педагогіка. Соціальна робота». – Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла». – Випуск 33. – 2014. – С. 176-179.

Анотація. Безуглий Д. Візуалізація як сучасна стратегія навчання.

У статті проаналізовано різні підходи до визначення поняття візуалізація. Розглянуто функції візуалізації, доцільність її використання під час навчання. Описано погляди науковці щодо застосування засобів візуалізації на уроках. Представлені власноруч створені засоби візуалізації для підтримки вивчення тем «Інтерполяція» та «Методи розв'язування нелінійних рівнянь».

Ключові слова: візуалізація, інтелект-карти, методика навчання математики.

Abstract. Bezuglyi D. Visualization a modern strategy of teaching.

In this article analyzes different approaches to the definition of visualization. The functions of visualization, the appropriateness of its use during teaching. We describe the views of scientists on the use of visualization tools in teaching. Presented manually created visualizations to support the study subjects "interpolation" and "Methods for solving nonlinear equations".

Keywords: visualization, Mind Maps, methods of teaching mathematics /teaching methodology of mathematics.

Ірина Бондар

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

irinka-bondar@rambler.ru

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ ЯК НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА

Поняття функції, як і поняття числа, пройшло довгий історичний шлях уточнення і розширення. Воно виникло з потреб практики і таких наук, як фізика, хімія, природознавство та ін. Явного означення функції ще не було навіть тоді, коли І. Ньютон (1643—1727) та Г. Лейбніц (1646—1716) уже відкрили диференціальне та інтегральне числення. Вперше термін «функція» вжив у своїх працях Г. Лейбніц, пов'язуючи його з геометричними уявленнями. Він також упровадив терміни «змінна», «константа».

Перше означення функції сформулював учень і співпрацівник Лейбніца Бернуллі в 1718 р.: функцією змінної величини називають кількість, що утворена будь-яким способом з цієї змінної величини і сталих.

У 1748 р. це означення було уточнене Л. Ейлером: функція змінної кількості – це аналітичний вираз, складений певним чином з цієї кількості і чисел або сталих кількостей. Отже, перше означення функції Й. Бернуллі і Л. Ейлер пов'язували з аналітичним виразом, що її задає. Однак таке тлумачення звужувало поняття функції принаймні з двох причин:

- 1) існують функції, які не можна задати аналітичним виразом (формулою);
- 2) той самий вираз може задавати різні функції. Наприклад, $y = x$ і $y = \sin(\arcsin x) = x$ для x з $[-1; 1]$. Отже, таке означення функції гальмувало подальший розвиток математичної науки та її застосувань.

Розвиток природознавства і математики потребувало розширення поняття функції. На це звернув увагу Ж. Фур'є, при розробці теорії рядів. Проте минуло понад 100 років після застосування першого означення функції, поки М.І. Лобачевський у 1834 р. не сформулював загальніше означення функції: число, яке задається для кожного x і разом з x поступово змінюється; значення функції можна задати або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засіб випробовувати всі числа і вибирати одне з них; нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою.

Три роки потому П. Діріхле дійшов висновку, що спосіб встановлення відповідності між значеннями x і y неважливий, і дав таке означення функції: y є функцією від x , якщо будь-якому значенню x відповідає цілком певне значення y , причому зовсім неістотно, яким саме способом встановлено зазначену відповідність.

Отже, в основу означень М.І. Лобачевського і П. Діріхле явно покладено ідею відповідності [3].

Аналіз навчально-методичної літератури для шкіл і вищих навчальних закладів свідчить, що в ній існують два напрями у тлумаченні поняття функції: класичний і сучасний.

У межах класичного напрямку є кілька підходів до розуміння поняття функції. Зокрема, функцію тлумачать як:

- 1) змінну величину, числові значення якої змінюються залежно від числових значень іншої змінної величини;
- 2) закон (або правило), за яким значення залежної змінної величини змінюються за зміни незалежної змінної;
- 3) відповідність між значеннями змінних величин.

Сучасний напрям у тлумаченні поняття функції охоплює такі означення, які ґрунтуються на теоретико-множинній основі та використовують поняття «відповідність», «множина». У межах цього напрямку також існує кілька підходів:

- 1) означають не саму функцію, а лише функціональну ситуацію;
- 2) функцію розглядають як відповідність або відношення між певними множинами;
- 3) функцію означають як закон відповідності між множинами.

Поняття функції є одним з основних понять математичного аналізу. У вищій математиці поняття функції тісно пов'язане з однією з властивостей – неперервністю. Строге означення неперервності функції сформулював у 1823 р. французький математик Огюстен Луї Коші (1789 – 1857). Ще раніше за Коші воно було сформульоване чеським математиком Бернардом Больцано (1781 – 1848). За цим означенням на базі теорії дійсних чисел було здійснено строге обґрунтування основних положень математичного аналізу [1].

Існують різні підходи до визначення поняття неперервності функції: так зване формальне означення неперервності функції (через границю), означення за Гейне, означення за Коші, означення через скінченний приріст функції.

Функція $f(x)$ неперервна в точці $x=x_0$, якщо виконується умова:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Неперервність функції, як її властивість, може бути як необхідною так і достатньою умовою існування інших властивостей даної функції. При чому такі теореми мають зміст у диференціальному та інтегральному численні, теорії рядів та інших розділах математики.

Проаналізувавши основні теореми диференціального числення, то поняття неперервності функції є достатньою умовою для перетворення функції на нуль (перша теорема Больцано-Коші), для існування проміжного значення функції (друга теорема Больцано-Коші), для існування оберненої функції (теорема Кантора). Неperервність є достатньою умовою також для обмеженості функції (перша теорема Вейєрштрасса), існування точної верхньої та точної нижньої граней (друга теорема Вейєрштрасса), для рівномірної неперервності функції, для існування горизонтальної дотичної до графіка функції (теорема Ролля), для існування середнього значення функції (теорема Лагранжа та теорема Коші).

Властивість неперервності функції є достатньою умовою для її інтегрованості та виконання ознаки Діріхле-Абеля збіжності невластних інтегралів.

У теорії рядів неперервність функцій є достатньою умовою для неперервності суми ряду, рівномірної збіжності послідовності дійсних неперервних функцій (теорема Діні) та інтегрування суми збіжного функціонального ряду.

Неперервність функції як її властивість є необхідною умовою для неперервності монотонної функції, а в теорії рядів - неперервність членів функціональних рядів (за умови їх рівномірної збіжності) є необхідною умовою для неперервності суми цього ряду.

Покажемо на прикладі, що невиконання умови неперервності функції приводить до невиконання самої теореми Больцано-Коші.

Наведемо формулювання даної теореми: нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього відрізка приймає різні значення:

$$f(a) = A, f(b) = B.$$

Тоді, яке б не було число C таке, що: $A < C < B$, знайдеться така точка c : $a < c < b$.

Нехай маємо функцію:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 + 1, & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{при } x > 1 \end{cases} \quad (\text{рис.1})$$

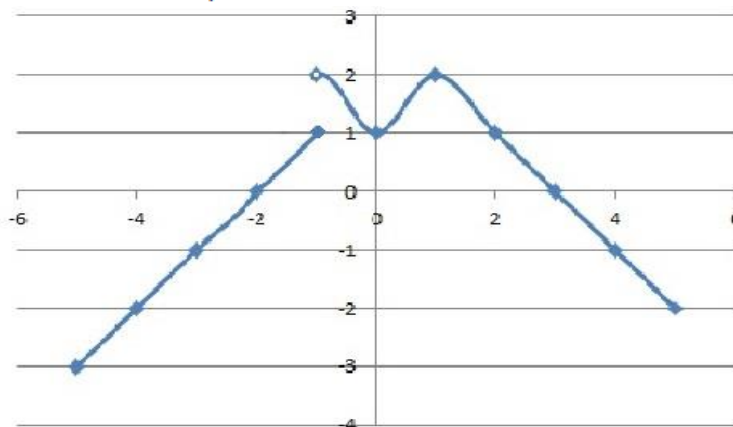


Рис. 1. Графік функції $f(x)$

Очевидно, що функція визначена на множині всіх дійсних чисел, тобто одна з умов теореми виконується. Але наша функція має розрив I роду в точці $x = -1$, отже, умова неперервності не виконується.

Розглянемо, наприклад, відрізок $x \in [-1,5; -0,5]$. Знайдемо значення функції на кінця відрізка:

$$\begin{aligned} f(-1,5) &= -1,5 + 2 = 0,5 \\ f(-0,5) &= (-0,5)^2 + 1 = 1,25 \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} -1,5 &< -0,5 \\ f(-1,5) &< f(-0,5) \end{aligned}$$

Ми остаточно переконалися, що виконуються всі умови теореми, крім умови неперервності.

Дослідимо безпосередньо виконання другої теореми Больцано-Коші.

Оберемо будь-яке значення $f(x_0)$ таке, що

$$0,5 < f(x_0) < 1,25.$$

Нехай, наприклад, $f(x_0) = 1,16$.

Знайдемо відповідне значення аргумента x_0 для заданого значення функції:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 1,16 \\ x_1 &= -0,4 \text{ або } x_2 = 0,4. \end{aligned}$$

Бачимо, що жодне із значень $x_1 = -0,4$ або $x_2 = 0,4$ не належить заданому відрізку $[-1,5; -0,5]$, а за другою теоремою Больцано-Коші знайдене значення аргумента має йому належати.

Якби задана функція мала вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 + 1, & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

то вона була б неперервною і теорема б виконувалась.

Отже, можна зробити висновок, що неперервність функції на відріжку в даній теоремі є важливою умовою і нехтувати нею не можна, інакше не виконується сама теорема.

Список використаних джерел

1. Каленіченко І. Історія виникнення математичного аналізу [Електронний ресурс] / І.Каленіченко// 2013. – Режим доступу: http://prilom.at.ua/publ/istorija_viniknennja_matematichnogo_analizu/1-1-0-2
2. Ляшко И. И. Математический анализ: введения в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике. Т. 1. / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач // М.: Едиториал УССР. – 2001. – С. 97-110.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Фихтенгольц В. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / В.М. Фихтенгольц // Государственное издательство физико-математической литературы. – М., 1962. – С. 146-166.

Анотація. Бондар І. Неперервність функцій як необхідна та достатня умова.

У статті розглянута властивість неперервності функції як необхідна або достатня умова існування інших її властивостей, зокрема, у теорії диференціального та інтегрального числення, теорії рядів. На прикладі проілюстровано, що невиконання даної властивості функції є важливою умовою, якою не можна нехтувати, бо це приводить до невиконання самої теореми.

Ключові слова: неперервність функцій, необхідна умова, достатня умова.

Summary. Bondar I. Continuity of functions as necessary and sufficient condition.

In the article the property of continuity of the function as a necessary or sufficient condition for the existence of its other properties, in particular, in the theory of differential and integral calculus, theory of series. The example shows that the property of continuity of a function is an important condition, which cannot be neglected.

Keywords: continuity of functions, necessary condition, sufficient condition.

Віта Гризун

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

vitaliya.gryzun@mail.ru

Науковий керівник – О.О. Одінцова

КОЛА, ПОВ'ЯЗАНІ З ТРИКУТНИКОМ

Шкільний курс планіметрії містить не так багато інформації з геометрії конфігурації трикутників і кіл. А тема ця дуже цікава. Багато великих вчених, такі як Гаусс, Ейлер, Лейбніц, Чева займалися вирішенням завдань пов'язаних з комбінацією трикутників і кіл. З найдавніших часів коло і трикутник вважали досконалими фігурами, в деяких країнах їх наділяли і наділяють магічними сенсом. Розглянемо такі цікаві факти геометрії: коло вписане та описане навколо трикутника, зовні описане коло коло дев'яти точок (коло Ейлера) та її властивості, коло Аполлонія.

Колом називається фігура, яка складається із всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки. Ця точка називається центром кола [1].

Коло називається *вписаним* в трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема 1. У будь-який трикутник можна вписати коло.

З рівності $\triangle APO$ і $\triangle AMO$, $\triangle BMO$ і $\triangle BNO$ випливає наслідок 1.

Наслідок 1. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника [2].

Відомо, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яку називають *інцентром*. Звідси можна сформулювати наслідок.

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це слідує з того, що бісектриси кутів A і B (рис.1) перетинаються тільки в одній точці. Звідси слідує, що існує тільки одна точка, рівновіддалена від сторін трикутника [3].

Радіус вписаного в трикутник кола обчислюється за формулою $r = \frac{S}{p}$, де r – радіус вписаного кола, p – півпериметр трикутника.

У випадку прямокутного трикутника $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r – радіус вписаного кола, a і b – катети, c – гіпотенуза [3].

Коло називається *описаним* навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини трикутника [2].

Теорема 2. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло [3].

Наслідок 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін [2].

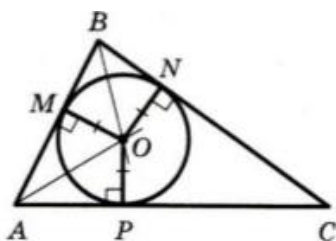


Рис. 1

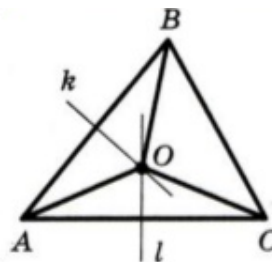


Рис. 2

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це слідує з того, що серединні перпендикуляри k і l (рис.2) мають тільки одну точку перетину. Звідси слідує, що існує тільки одна точка, рівновіддалена від всіх вершин трикутника [3].

У гострокутному трикутнику центр описаного кола лежить всередині трикутника, у тупокутному – зовні трикутника, у прямокутному – на середині гіпотенузи [4].

Крім кіл, вписаного в трикутника та описаного навколо нього розглядають ще *зовні вписане коло*.

Проведемо у трикутнику ABC бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C (рис. 3). Точка O_1 перетину рівновіддалена від прямих AB , BC , AC ($O_1M = O_1K = O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони BC трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називається *зовні вписаним*. Центр O_1 кола рівновіддалений від продовжень сторін AB і AC , тому він лежить на бісектрисі кута A .

Для будь-якого трикутника можна провести три зовні вписаних кола.

Зовні вписане коло має цікаві властивості. На рисунку 3 $AM = AB + BK$, оскільки $BK = BM$; $AN = AC + CK$, оскільки $CK = CN$. Додавши ліві і праві частини цих нерівностей, маємо:

$$AM + AN = AB + AC + BK + CK = AB + AC + BC.$$

Оскільки $AM = AN$, $AM = AN = \frac{AB + AC + BC}{2} = p$, де p – півпериметр трикутника ABC .

Теорема 3. Відстані від точок дотику зовні описаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника, до їх спільної вершини, дорівнює півпериметру трикутника.

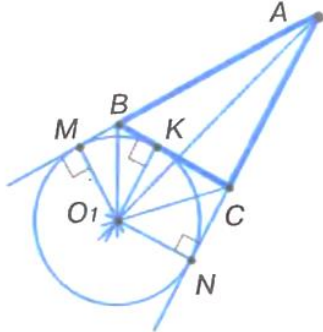


Рис. 3

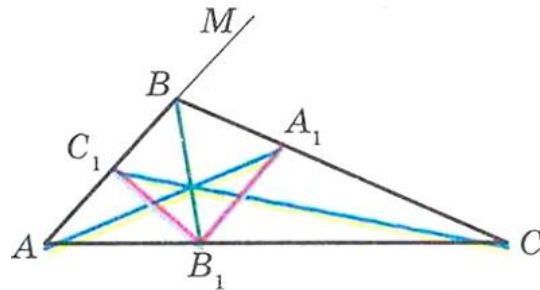


Рис. 4

Оскільки, $AM = AB + BK = p$, $AN = AC + CK = p$ і $AM = AN$, то $AB + BK = AC + CK = p$.

Теорема 4. Пряма, що проходить через точку дотику зовні вписаного кола до сторони трикутника і протилежну цій стороні вершину, поділяє його периметр навпіл [4].

Наведемо приклад задачі.

Задача. У трикутнику ABC з кутом B , який дорівнює 120° , проведено бісектриси AA_1, BB_1, CC_1 . Знайти кут $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай $\angle MBC$ – зовнішній кут трикутника ABC при вершині B (рис.4). Очевидно, що $\angle MBC = 60^\circ$. Тоді промінь BA_1 – бісектриса кута MBB_1 . Отже, точка A_1 – центр зовнішнього кола трикутника ABB_1 . Тоді промінь B_1A_1 – бісектриса кута BB_1C . Аналогічно, промінь B_1C_1 – бісектриса кута AB_1B .

Отже, $\angle A_1B_1C_1$ дорівнює половині розгорнутого кута, тобто $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ [1].

Теорема 5. У будь-якому трикутнику основи висот, середини сторін і середини відрізків, що з'єднують ортоцентр - точку перетину висот – з вершинами трикутника, лежать на одному колі [8].

Це коло називається *колом дев'яти точок* або *колом Ейлера* (рис.5).

Доведення. Нехай у трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 – середини відповідно сторін BC, AC, AB ; точки H_a, H_b, H_c – основи висот; точки E_a, E_b, E_c ділять навпіл відповідно відрізки AH, BH, CH . Оскільки A_1B_1 – середня лінія трикутника ABC , то $A_1B_1 = \frac{AB}{2}$. Відрізок $H_a C_1$ є медіаною прямокутного трикутника $AH_a B$. Отже, $H_a C_1 = \frac{AB}{2}$ і $A_1B_1 = H_a C_1$. Тоді трапеція $B_1C_1H_a A_1$ має рівні бічні сторони A_1B_1 і $H_a C_1$, тобто є рівнобічною. Отже, точка H_a лежить на колі, описаному навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно на цьому колі лежать точки H_b і H_c .

Зазначимо, що $C_1E_b \parallel AH_c$, оскільки C_1E_b – середня лінія трикутника ABH_a , $B_1C_1 \parallel BC$. Тоді $C_1E_b \perp B_1C_1$. Аналогічно $A_1E_b \perp A_1B_1$. Отже у чотирикутнику $C_1E_b A_1 B_1$ два протилежні кути $\angle E_b C_1 B_1$ і $\angle E_b A_1 B_1$ прямі. Це означає, що навколо нього описано те коло, яке ми розглядаємо, тому точка E_b лежить на ньому. Аналогічно доводиться, що на цьому колі лежать також точки E_a, E_c [5].

Наслідок 3. Радіус кола Ейлера вдвічі менший радіуса описаного кола [6].

Ця коло було відкрите великим вченим Л. Ейлером в XVIII столітті, тому його часто називають колом Ейлера. Минуло століття, і коло заново відкрив вчитель провінційної гімназії в Німеччині Карл Фейєрбах (рідний брат відомого філософа Людвіга Фейєрбаха).

Розглянемо ще коло, пов'язане з трикутником.

Колом Аполлонія називається геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є сталим [7].

Вперше їх описав Аполлоній із Перги, відомий грецький математик [9].

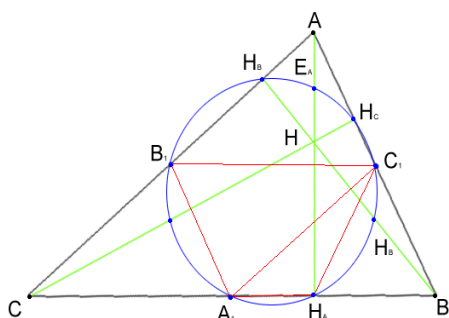


Рис. 5

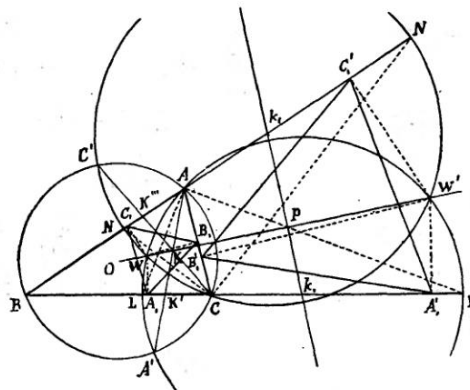


Рис. 6

Якщо L і L' , M і M' , N і N' належать внутрішнім та зовнішнім бісектрисам трикутника ABO (рис. 6), то коло, яке має діаметри відрізків LL' , MM' , NN' називається колом Аполлонія.

Так як внутрішня та зовнішня бісектриси одного кута трикутника взаємно перпендикулярні, то кути $\angle LAL'$, $\angle MBM'$, $\angle NCN'$ прямі, то кожне із кіл Аполлонія проходить через вершину трикутника, протилежній тій стороні, на якій знаходиться центр кола трикутника.

За властивістю бісектриси трикутника:

$$\begin{aligned} \frac{LB}{LC} &= \frac{L'B}{L'C} = \frac{c}{b} = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \\ \frac{MC}{MA} &= \frac{M'C}{M'A} = \frac{a}{c} = \frac{1}{c} : \frac{1}{a}, \\ \frac{NA}{NB} &= \frac{N'A}{N'B} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}; \end{aligned}$$

отже, сторони трикутника BC , CA , AB діляться колом Аполлонія гармонічно у відношенні

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{c} : \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

З цього слідує, що три кола Аполлонія трикутника ABC перетинаються в двох полярних зв'язаних точках W і W' , відстань яких від вершин трикутника обернено пропорційним його сторонам трикутника, так що

$$WA : WB : WC = W'A : W'B : W'C = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Радикальна вісь WW' кола Аполлонія проходить через центр O кола ABC і ділиться ним гармонічно, так що $OW \cdot OW' = R^2$ [10, VI, 32].

Якщо K_1, K_2, K_3 центри кіл Аполлонія LAL' , MBM' , NCN' , то

$$\begin{aligned} \frac{K_1B}{K_1C} &= \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} = \frac{c^2}{b^2}, \\ \frac{K_2C}{K_2A} &= \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} = \frac{a^2}{c^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{K_3 A}{K_3 B} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Застосування досвіду розв'язування задач з використанням кіл, які пов'язані з трикутником, дає додаткові можливості при вивченні геометрії, допомагає підвищити рівень просторової уяви, рівень логічної культури учнів. Дана тема має велике прикладне і практичне значення і вимагає посиленої уваги як з боку вчителя, так і з боку учня. Тому необхідно не зупиняти пошук шляхів удосконалення методики навчання учнів із заявленої теми.

Список використаних джерел

1. Мерзляк А.Г. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2010. – 240 с.
2. Істер О. С. Геометрія 7 клас: : підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.
3. Мерзляк А.Г. Підручник для 7 класу. – Х.: Гімназія, 2008. – 208 с.
4. Бурда М. І. Підручник для 7 класу. – Вид. Зодіак – ЕКО, 2007. – 204 с.
5. Партасюк Н. А. Задачі Ейлера. – м. Красилів, 2010р.
6. Пряма Ейлера та коло Ейлера: [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.nnstr.com/Books/book3/book1_2.pdf
7. Бевз Г.П. Геометрія 10 клас, підручник для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2010.
8. Окружность девяти точек и прямая Эйлера: [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/99b1a646-a5cc-c976-bde6-2fc832c48e1e/euler.html>
9. Українська радянська енциклопедія в 12-ти томах / За ред. М. Бажана. — 2-ге вид. — К.: Гол.УРЕ, 1974-1985.
10. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. — Одесса: Типография бланкоиздательства М.Шпенцера, 1992. — 351 с.

Анотація. Гризун В. Кола, пов'язані з трикутником.

У статті проаналізовані властивості основних кіл трикутника.

Ключові слова: трикутник, коло, вписане коло, описане коло, зовні вписане коло, коло Ейлера, коло Аполлонія.

Summary. Hryzun V. Lines in a triangle.

There are analyzes the main properties of circles of the triangle in this article.

Keywords: triangle, circle, inscribed circle Description circle outside inscribing circle, circle Euler circle of Apollonius.

Альона Гурба

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка
ale-kyzhel@yandex.ru

ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ХІМІЇ

В умовах докорінного перетворення нашого суспільства та кардинальних економічних перетворень підготовка компетентного фахівця є важливим складником сучасної системи професійної освіти. У зв'язку зі зростанням в інформаційному

суспільстві ролі математичних знань, майбутні вчителі хімії потребують ґрунтовної математичної підготовки, яка давала б можливість, використовуючи математичний апарат, розв'язувати численні актуальні завдання хімічного характеру, застосовувати сучасну обчислювальну техніку для моделювання хімічних процесів, упроваджувати науково-хімічні досягнення у практичній діяльності.

Математична освіта, як підсистема загально-професійної підготовки студентів природничого профілю закладає фундамент успішної майбутньої діяльності. З іншого боку, вивчення хімічних аспектів математики сприяє не лише накопиченню певної системи знань, умінь і навичок, а й розвитку інтелектуальної сфери студентів, формуванню аналітико-синтетичного мислення тощо. Тому професійно-математичну підготовку студентів слід розглядати як важливу складову в системі фундаментальної підготовки сучасного вчителя хімії. Метою такої підготовки стає не лише здатність студента до неперервної самоосвіти й практичного застосування математичних знань в хімічній сфері, а й формування високого рівня математичної культури [1].

Професійно-прикладна спрямованість вивчення математики має виявлятися не лише у розв'язанні задач прикладного професійно-орієнтованого змісту, а й методологічному зв'язку, що дозволяє продемонструвати роль математики в сучасному світі, необхідність оволодіння математичними методами як інструментом для вивчення різних, передовсім професійних, галузей людської діяльності.

Очевидно, що фундаментальне і прикладне повинно знаходитися в органічній єдності, тоді фундаментальна математична підготовка дозволить студентам оволодіти математичними методами, продовжити самоосвіту, а прикладна – забезпечить можливість застосування отриманих математичних знань під час розв'язання реальних задач, що виникають у процесі життєдіяльності та виробництва. Саме взаємозв'язок фундаментальної та спеціальної складових професійної підготовки сприятиме формуванню високого рівня математичної культури майбутніх вчителів хімії.

Отже, математична освіта студентів природничого профілю має базуватися на узгодженості курсу математики з математичним апаратом спеціальної підготовки та передбачати розвиток професійно-важливих математичних компетенцій у процесі вивчення фахових дисциплін [1].

Математична підготовка студента у ВНЗ це три взаємопов'язані процеси та сукупність їх результатів: засвоєння певної системи математичних знань, вмінь та навичок, необхідних у майбутній професійній діяльності та повсякденному житті, достатніх для оволодіння іншими освітніми галузями знань та забезпечення неперервної освіти; формування мотивації придбання знань і вмінь та використання математичних методів у професійній діяльності; інтелектуальний розвиток студентів (розвиток логічного мислення і просторової уяви; алгоритмічної, інформаційної та графічної культур, пам'яті, уваги, інтуїції, тощо) та формування наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності, розвитку пізнавальної самостійності студентів при застосуванні математичних знань та вмінь [1].

Сучасні тенденції розвитку науки та техніки висувають ряд вимог до математичної підготовки майбутніх вчителів хімії, зокрема:

- математична підготовка повинна бути універсальною (комплекс одержаних математичних знань, умінь та навичок має бути таким, що забезпечить як можливість вивчення на сучасному рівні природничо-наукових та гуманітарних, загально-професійних та спеціальних дисциплін, так і здійснення професійної діяльності);

- математична підготовка має носити більш прикладний та професійно спрямований характер (зміст математичних дисциплін та професійно-орієнтованих має бути взаємоузгодженим);

- математична підготовка має бути динамічною, постійно коректуватись та вдосконалюватись, враховувати розвиток науки, техніки, суспільства;

- зміст математичної підготовки має бути оптимальним та забезпечувати студентів достатнім обсягом математичних знань, навичок та умінь необхідних для майбутньої професійної діяльності;

- математична підготовка має бути спрямована на інтелектуальний розвиток особистості, розвиток у студентів здатності до засвоєння нових знань, самостійного пошуку та обробки нової інформації.

У результаті математичної підготовки у студента повинні сформуватись наступні математичні здібності: вміння абстрактно мислити, вміння схематизувати, обчислювальні здібності, здатність оперувати математичною символікою та математичною мовою, інженерно-математична інтуїція, логічність, гнучкість, критичність та креативність математичного мислення.

Культура (від лат. cultura – виховання, освіта, розвиток) – це сукупність практичних, матеріальних і духовних надбань суспільства, які відображають досягнутий рівень розвитку суспільства і людини. У вузькому розумінні культура – це сфера духовного життя суспільства, що охоплює системи виховання, освіти, творчості, а також установи й організації, що забезпечують функціонування цих систем. Водночас під культурою розуміють рівень освіченості і вихованості людини, а також оволодіння певною галуззю діяльності [2, с. 182]. Враховуючи це, розумітимемо під професійною культурою вчителя математики сукупність його практичних, матеріальних і духовних надбань, що визначають якість його професійної діяльності. Професійна культура цілком визначається рівнем освіченості і вихованості людини та рівнем володіння галуззю діяльності вчителя хімії.

Сучасні освітньо-кваліфікаційні характеристики вчителя задають його бажаний образ і визначають, по суті, державний стандарт. Реформування системи освіти України вимагає оновлення змісту вищої педагогічної освіти.

Розробка сучасних освітньо-кваліфікаційних характеристик відноситься до першочергових завдань цього реформування. При цьому слід врахувати сучасний рівень розвитку науки, техніки, виробництва, культури і освіти, а також потреби сучасної школи.

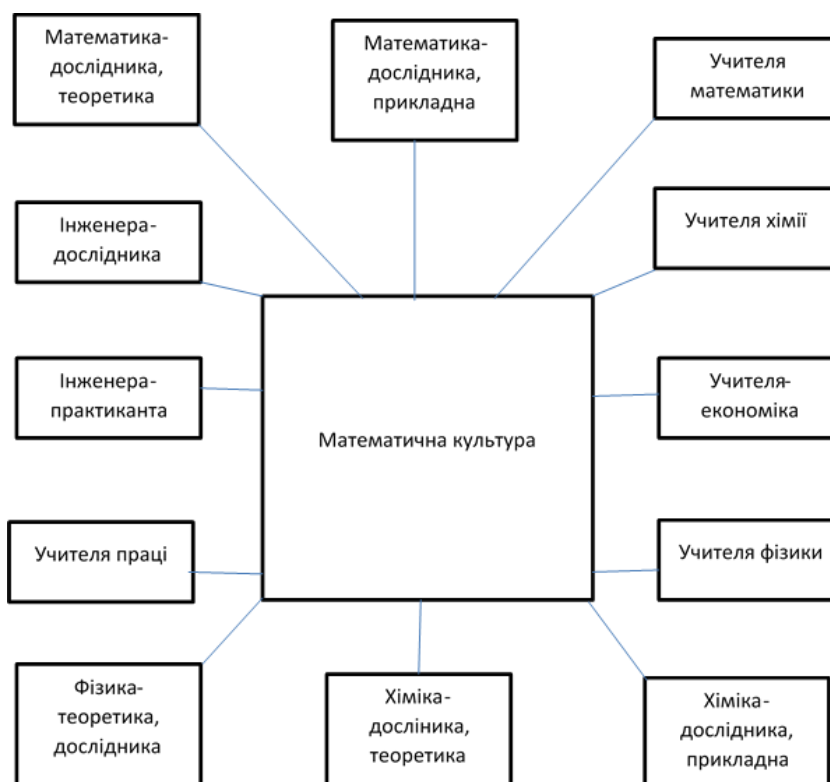
Загальною метою професійної підготовки вчителя хімії є формування його професійної культури, основні компоненти якої зображено на схемі 1. Зрозуміло, що кожен компонент професійної культури фахівця (зокрема, і вчителя хімії), за винятком лише моральної культури, складається із загальної та спеціальної частин.

Відносність змісту компонентів професійної культури фахівця ілюструється на прикладі математичної культури схемою 2, яку слід розуміти так, що математична культура є складовим компонентом професійної культури фахівців різного профілю, проте його зміст не є інваріантним, а суттєво залежить від специфіки фаху.

Схема 1



Схема 2



Математичну культуру вчителя хімії визначають такі його знання та уміння.

Знання:

- основних фактів з фахових математичних дисциплін;
- загальних методів розв'язування математичних задач, включаючи і методи доведення тверджень;

- сутності математичного моделювання і методів побудови математичних моделей ;
- прикладів важливих застосувань математики у різних галузях науки, техніки і життя;
- найяскравіших фактів з історії математики;
- шкільного курсу математики та його особливостей у різних типах середніх навчальних закладів;
- логічних прогалин шкільного курсу математики, причин їх виникнення та можливі засоби їх усунення;
- основних математичних видань (підручники, посібники, монографії, журнали тощо), пов'язаних з професійною діяльністю вчителя математики [2].

Уміння:

- використовувати знання з фахових математичних дисциплін у своїй роботі в школі;
- розв'язувати математичні задачі, зокрема, і доводити твердження різного рівня складності, демонструючи зразок логічного мислення, обґрунтованості кожного кроку міркувань, гнучкість думки, творчий підхід, широкий математичний кругозір, математичну інтуїцію, яскравість уявлень;
- розвивати прикладну спрямованість математики, будувати математичні моделі процесів і явищ, пов'язаних з матеріалом шкільного курсу хімії та доступних учням середніх шкіл;
- використовувати практично значущі задачі для підвищення рівня мотивації вивчення математики;
- використовувати факти з історії математики для підвищення інтересу учнів до хімії та активізації процесу навчання хімії;
- використовувати різні підходи та різні методи введення найважливіших понять і різні методи доведень тверджень;
- подавати один і той самий матеріал на різних рівнях строгості, проте кожного разу чітко, точно, зв'язно висловлюючи думки;
- при необхідності пояснювати сутність логічних прогалин шкільного курсу математики та розкривати можливі шляхи їх усунення;
- систематично працювати над математичною літературою і навчати цього своїх учнів, виховуючи критичність мислення, вміння виявляти помилки і неповноту міркувань, будувати контр приклади, узагальнювати; розвивати нахили учнів до творчої діяльності [2].

Список використаних джерел

1. Глушко О.О. Математична підготовка майбутніх вчителів хімії і біології в педвузі як фактор, що підвищує конкурентоспроможність фахівця [Електронний ресурс] / О.О. Глушко, С.Є. Яценко. – Режим доступу: <http://nbuv.gov.ua>
2. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. Г. О. Михалін. – Київ: НПУ імені М. П. Драгома- нова, 2003. – 320 с.

Анотація. Гурба А. Особливості формування математичної культури майбутніх вчителів хімії.

У статті розглянуто термін «культура» та завдання та уміння, що визначають математичну культуру майбутнього вчителя хімії.

Ключові слова: культура, математична культура, математична освіта, професійно-прикладна спрямованість.

Summary. Gurba A. Features of formation of mathematical culture of future teachers of chemistry.

In the article the term "culture" and the tasks and skills that define mathematical culture of future teachers of chemistry.

Keywords: Culture, mathematical culture, mathematical education, vocational and applied orientation.

Тетяна Завалій

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

t_zavaliy@mail.ru

Науковий керівник – І.В.Шищенко

ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Вимірювання величин, зокрема, геометричних (довжин, кутів, площ, об'ємів), – один з найскладніших розділів математики. Найвагомішим аргументом на користь цієї тези є той факт, що лише наприкінці XIX – на початку XX ст. було створено загальну теорію вимірювання, насамперед, завдяки роботам К.Жордана, Е.Бореля, А.Лебега.

Незважаючи на те, що класичні формули обчислення об'ємів і площ поверхонь були відомі вже давньогрецьким вченим, для їхнього повноцінного обґрунтування знадобилось практично два тисячоліття. Поки не вдавалось формалізувати ідеї граничного переходу, твердження щодо вимірювання величин не мали відповідного підґрунтя.

Тривалий час навчання геометрії обмежувалось лише уявленнями про поняття об'єму і поверхні тіла. У діючих підручниках стереометрії [1] цим поняттям дають змістові означення, які ґрунтуються на навчальному та практичному досвіді учнів.

Вивчення цієї теми завершує геометричну частину курсу математики. Тут найбільшою мірою може і має бути подана прикладна спрямованість геометрії. Це зумовлено тим, що застосування геометрії значною мірою пов'язані з вимірюванням площ, об'ємів. Забезпечення такої спрямованості потребує вибору відповідних підходів до викладу матеріалу й адекватної системи вправ та запитань. Тому методика вивчення геометричних величин у старшій школі потребує особливої уваги.

Проблема навчання стереометрії, у тому числі й питання вивчення геометричних величин, висвітлюються у роботах Г.Бевза, Я.Бродського, М.Бурди, З.Слепкань, В.Швеця та інших. Учені і педагоги дійшли висновку, що сучасний етап розвитку шкільної освіти і навчання стереометрії потребує підвищення уваги до цих проблем та використання нових підходів у навчальному процесі з курсу стереометрії.

Метою статті є висвітлення особливостей вивчення геометричних величин в курсі стереометрії.

Складність вивчення теми зумовлена принаймні двома обставинами:

- високим рівнем абстрактності означень понять об'єму і площі поверхні тіла;
- застосуванням ідеї неперервності і граничного переходу, тобто ідей початків аналізу.

У навчальній і методичній літературі з геометрії розрізняють два види означень понять геометричних величин: аксіоматичний і конструктивний.

Аксиоматичне означення геометричної величини полягає у виборі її характеристичних властивостей і побудові теорії вимірювання цієї величини на їхній основі, побудові алгоритмів та виведенні формул для знаходження цієї величини[2].

При конструктивному означенні поняття об'єму починають з побудови відображення деякої множини фігур у множину додатних чисел. У такому разі основні властивості об'єму стають вже не аксіомами, а теоремами.

Конкретна реалізація обох підходів доволі громіздка, переобтяжена складними теоремами. Наприклад, при аксиоматичному підході виникає необхідність характеризувати клас фігур, на яких розглядається відображення, доводити існування і єдиність цього відображення. При конструктивному підході громіздкими стають доведення основних властивостей об'єму.

Аксиоматичне і конструктивне означення поняття об'єму еквівалентні. У шкільних підручниках геометрії за основу беруть аксиоматичне означення об'єму. Безумовно, розглядати з учнями питання існування й єдиності в теорії об'ємів немає змоги. Отже, у шкільних підручниках наводиться спрощений виклад теорії об'ємів. Проте, навіть у такому вигляді цей матеріал має високий рівень абстрактності й узагальненості.

Перше уявлення про об'єми тіл і їх обчислення учні дістають у курсі математики 5 класу у зв'язку з вивченням прямокутного паралелепіпеда. У 11 класі вони повертаються до вивчення об'ємів на дедуктивній основі.

Ще більше методичних проблем виникає при розгляді поняття площі поверхні тіла. Труднощі тут пов'язані з відсутністю простого означення, яке б охоплювало всі три види «викривлених» поверхонь – циліндричну, конічну і сферичну[1].

У процесі вивчення теми мають бути розглянуті різні методи обчислення об'ємів і площ поверхонь. Особливу увагу необхідно приділити методу розбиття, який має велике практичне значення. Його суть полягає у поділі тіла на частини, об'єми яких легко знайти або з яких можна скласти тіло відомого об'єму.

Метод вичерпування і застосування інтеграла у даній темі передбачає володіння відповідними ідеями і поняттями з курсу алгебри і початків аналізу. Встановлення тісних природніх зв'язків з цим курсом є одним із головних завдань вивчення даної теми стереометрії.

Важливий методичний прийом вивчення об'ємів і площ поверхонь – це використання аналогії між вимірюваннями площ плоских фігур та об'ємів геометричних тіл.

Тому важливою умовою готовності учнів до вивчення геометричних величин є повторення відповідного планіметричного матеріалу, насамперед формул для обчислення площ многокутників, довжини кола і площі круга, понять круга, вписаного в многокутник і описаного навколо нього. Цей матеріал доцільно подати у вигляді таблиці (табл. 1) [2].

Використовуючи аналогію введенні формул для об'ємів циліндрів доцільно згадати послідовність виведення формул для обчислення площ фігур. Для цього можна скористатися таблицею (табл.2).

Обговорюючи інформацію, яка міститься у таблиці, слід звернути увагу на те, яким методом отримують формули для обчислення площ прямокутника, паралелограма, трикутника, n -кутника, круга. Цей розгляд дає змогу визначити послідовність кроків для знаходження формул об'ємів:

1) виведення формул для обчислення об'єму прямого паралелепіпеда розбиттям його на дві прямі призми і «склеюванням» з них прямокутного паралелепіпеда;

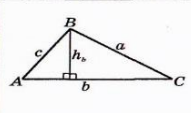
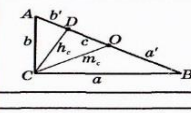
2) виведення формули для обчислення об'єму прямої трикутної призми шляхом побудови її до прямого паралелепіпеда і застосування методу розбиття;

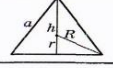
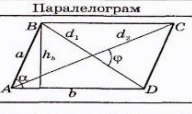
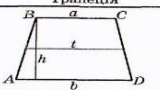
3) виведення формули для обчислення об'єму прямої n-кутної призми розбиттям її на прямі трикутні призми;

4) виведення формули для обчислення об'єму прямого циліндра методом вичерпування [3].

Таблиця 1

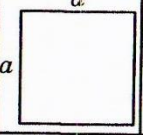
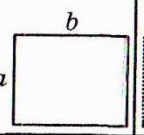
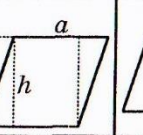
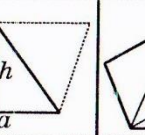
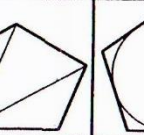
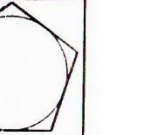
Повторення планіметричного матеріалу

Трикутник	Позначення
	a, b, c — сторони; A, B, C — кути; h_b — висота з вершини B ; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; S — площа трикутника; p — півпериметр; m_a — медіана до сторони a .
Формули	
$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $S = \frac{1}{2} ab \sin C$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона); $S = rp = \frac{abc}{4R}$; $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (теорема косинусів); $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів).	
Прямокутний трикутник	Позначення
	a, b — катети; c — гіпотенуза; b', a' — проекції катетів на гіпотенузу; m_c — медіана до гіпотенузи; R — радіус описаного кола; O — центр описаного кола.
Формули	
$c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора); $S = \frac{1}{2} ab$; $m_c = R = \frac{c}{2}$; $h_c^2 = b'a'$; $a^2 = ca'$; $b^2 = cb'$.	

Правильний трикутник	Позначення
	a — сторона; h — висота; R — радіус описаного кола; r — радіус вписаного кола; S — площа.
Формули	
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.	
Паралелограм	Позначення
	a, b — сторони; h_a — висота з вершини B ; d_1, d_2 — діагоналі; S — площа; α — кут паралелограма; ϕ — кут між діагоналями.
Формули	
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = b \cdot h_a$; $S = ab \sin \alpha$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \phi$.	
Трапеція	Позначення
	a, b — основи; h — висота; t — середня лінія; S — площа.
Формули	
$t = \frac{a+b}{2}$; $S = t \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$.	

Таблиця 2

Формули площ фігур

					
$S = a^2$	$S = ab$	$S = ah$	$S = \frac{1}{2} ah$	$S = \sum S_{\text{тр}}$	$S = \pi R^2$

Досвід роботи вчителів математики, власний досвід, отриманий у ході проходження педагогічної практики, свідчить про те, що доведення формул площ об'єму похилого паралелепіпеда методом перетворення його додатковими побудовами в прямокутний, як і доведення формули об'єму призми, не викликають в учнів особливих труднощів, якщо до того ж використали заздалегідь виготовлені моделі, що ілюструють етапи перетворення. Важче сприймається учнями доведення формули об'єму трикутної піраміди [2].

Виведення формул площі поверхні многогранників та тіл обертання учні сприймають досить легко. Вчителю варто наголосити, що задача обчислення площі поверхні многогранників та тіл обертання зводиться до обчислення площі його розгортки. З одного боку, таким чином робиться акцент на зведенні даної задачі до планіметричної, а з іншого – проводиться певна підготовка до розширення поняття площі поверхні окремих тіл.

Розглянемо задачу. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см, а висота – 8 см (рис. 1). Знайти площу повної поверхні циліндра.

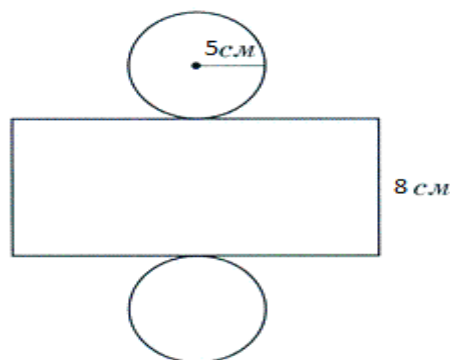


Рис. 1. Розгортка циліндра

Розв'язання

$$2 \cdot 5^2 \pi + 2 \cdot 5 \pi \cdot 8 = 50\pi + 80\pi = 130\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь: $130\pi \text{ см}^2$

Набір задач на обчислення об'ємів і площ поверхонь має бути багатим на різні комбінації тіл. Необхідно передбачити достатню кількість завдань, що потребують виконання вимірювань, а потім обчислення геометричних величин. У практичних задачах доводиться обчислювати об'єми та площі поверхонь тіл, які складаються з найпростіших, причому дані для їхнього обчислення знаходиться або за допомогою безпосереднього вимірювання, або з рисунка.

Список використаних джерел

1. Геометрія (академічний, профільний рівень) Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. 2011 р.
2. Методика навчання математики/ З.І.Слепкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
3. Стереометрія у старшій школі/ Я.С.Бродський, В.Ю.Гречук, О.Я.Павлов, А.К.Сліпенко – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005 – 404 с.

Анотація. Завалій Т. Вивчення геометричних величин в курсі стереометрії.

Охарактеризовано загальні особливості вивчення теми «Площі поверхонь та об'єми многогранників». Продемонстровано відповідний планіметричний матеріал у вигляді таблиць. Наведено приклади задач, які доцільно продемонструвати старшокласникам у ході вивчення теми.

Ключові слова: стереометрія, геометричні величини, поверхні многогранників та тіл обертання, площа, об'єми.

Summary. Zavaliiy T. The study of geometric quantities aware geometry

The characteristic features of the general study of the topic "surface area and volume of polyhedrons." Demonstrate appropriate drew material in the form of tables. Examples of tasks that are appropriate to show high school students in the study of the topic.

Keywords: solid geometry, geometric size, surface polyhedrons and solids of revolution, area, volume.

Вікторія Зубко*Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка**vikazubko601@gmail.com**Науковий керівник – А.О. Розуменко*

УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ПРИ ВИВЧЕННІ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Викладання предмету – це мистецтво вчителя подати інформацію так, щоб її засвоєння учнями було максимально-ефективним, щоб вони розуміли матеріал і бажали вивчати його. Тому викладання будь-якої дисципліни вимагає врахування певних її особливостей. Викладання математики не є виключенням.

Під узагальненням розуміють процес виділення істотних ознак об'єкту, підведення частинного випадку під загальний висновок.

Систематизація – це процес зведення здобутих знань в єдину наукову систему, встановлення їхньої єдності [3, с. 41].

Необхідність систематизації та узагальнення знань учнів пов'язана з багатьма причинами. По-перше, не можна уникнути процесу забування, що приводить до зменшення об'єму знань, труднощам та помилкам, а іноді і до повної неможливості відтворення матеріалу, який вивчався раніше. По-друге, повертаючись до раніше вивченому матеріалу, створюються умови для отримання нових знань, кріпкого закріплення та поглиблення. По-третє, це дає можливість вчителю направити роботу по надолуженню недоліків у знаннях учнів.

Залежно від ролі та місця в навчальному процесі можна виділити наступні етапи узагальнення та систематизації знань:

1. Первинне узагальнення здійснюється під час сприйняття та осмислення навчального матеріалу.

2. Понятійне узагальнення здійснюється на уроці в процесі роботи над засвоєнням нового матеріалу.

3. Поурочне узагальнення та систематизація полягає в виявленні між поняттями, які вивчаються, загальних ознак та властивостей, в об'єднанні засвоєних понять у системи, розкритті зв'язків та відношень між елементами даної системи.

4. Тематичне узагальнення та систематизація забезпечують засвоєння цілої системи понять, які вивчалися на протязі певного часу.

5. Підсумкове узагальнення та систематизація служить для встановлення зв'язків та відношень між системами знань, засвоєних в процесі вивчення цілого курсу.

6. Міжпредметне узагальнення та систематизація здійснюється по ряду суміжних предметів (математики, фізики, хімії, інформатики) [4, с. 112-114].

Змістова лінія функцій проходить через весь курс математики середньої школи. Пропедевтика теми «Функції та їх графіки» відбувається на уроках математики ще в 5-6 класах і проходить в декілька етапів:

1) коли аналізується залежність результатів арифметичних дій від зміни компонентів;

2) коли розглядається координатна площина і робляться висновки про те, що кожній точці координатної площини відповідає впорядкована пара чисел, причому єдина; будь-якій впорядкованій парі чисел відповідає єдина точка координатної площини.

У сьомому класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять –

поняття функції. Тут же розглядається лінійна функція та її графік. Інші види функцій розглядаються у зв'язку з вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу. Зокрема, у восьмому класі в темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені» учні ознайомлюються з функціями $y = \frac{k}{x}$ і $y = \sqrt{x}$ та їх властивостями.

У дев'ятому класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується з розв'язуванням квадратних нерівностей (нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції). Розглядаються також найпростіші перетворення графіків функцій [3].

По завершенню 9 класу учні проходять державну підсумкову атестацію, де завдання що стосуються функціональної змістової лінії займають велику частину. Типовими для першої та другої частини є такі завдання: знайти значення функції в даній точці; із запропонованих варіантів вибрати графік заданої функції; за графіком встановити функцію; знайти область визначення чи область значення даної функції; знайти при яких значення x функція невизначена; знайти точки перетину графіків функцій з віссю абсцис; встановити чи належать точки графіку функції; знайти нулі функції; знайти вершину параболи; на графіку зображено графік руху і потрібно визначити швидкість руху; на малюнку зображено графік деякої функції на проміжку, встановити проміжок зростання (спадання) функції, проміжки на яких $f(x) > 0$ чи $f(x) < 0$; встановити який графік отримали в результаті перетворень; встановити область визначення якої з поданих функції є дана множина.

Наведемо декілька прикладів з державної підсумкової атестації для 9 класів 2014 року.

- Знайдіть значення функції $y = 2x - 3$ у точці $x_0 = -3$
 А) -9 Б) 9 В) 3 Г) -3
- Графіком якої функції є гіпербола ?
 А) $y = 2x + 7$ Б) $y = x^2 + 7$ В) $y = \frac{7}{x}$ Г) $y = \frac{x}{7}$
- Через яку точку проходить графік $y = 2x^2 - 1$?
 А) (-3; -19) Б) (-3; 17) В) (-3; 11) Г) (-3; -17)
- Знайдіть абсцису вершини параболи $y = 0,3x^2 + 6x - 2$.
 А) 5 Б) -5 В) 10 Г) -10
- Як треба перенести паралельно графік функції $y = \frac{3}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{3}{x-4}$?
 А) на 4 одиниці вгору Б) на 4 одиниці вниз
 В) на 4 одиниці вправо Г) на 4 одиниці вліво
- Які координати має точка перетину графіка функції $y = -3x + 12$ з віссю абсцис?
 А) (0; 12) Б) (12; 0) В) (0; 4) Г) (4; 0)
- Знайдіть область визначення функції $y = \frac{4}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.
- Знайдіть нулі функції $y = -4x^4 + 5x^2 - 1$.

В третій частині потрібно побудувати графік функції і за ним встановити проміжки зростання чи спадання, область визначення чи значення тощо.

Наприклад завданням одного з варіантів є побудувати графік функції $y = x^2 + 6x$ і користуючись графіком знайти:

- 1) проміжок зростання функції;
- 2) множину розв'язків нерівності $x^2 + 6x \leq 0$.

Четверта частина також містить завдання на побудову графіка функції, але дещо складнішого змісту, але цю частину учні академічного рівня не розв'язують. Прикладом є таке завдання: при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x^2 - 2ax + a^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ не має коренів? [1]

Старша школа є профільною, тому вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу» може відбуватися за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним і поглибленим рівнем. За академічним рівнем першою темою 10 класу є «Функції, їх властивості та графіки». У цій темі здійснюється повторення, систематизація матеріалу стосовно функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення. Після цього учні переходять до вивчення теми «Степенева функція», починаючи з розгляду степеневі функції з натуральним показником, тобто функції виду $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ та розглядають 2 випадки: коли $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ та $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Встановлюють область значення та визначення функцій, парність функції, нулі функції, проміжки знакосталості та монотонності.

Аналогічно відбувається дослідження степеневі функції з цілим показником $y = x^n, n \in \mathbb{Z}$ і дійсним показником $y = x^n, n \in \mathbb{R}$.

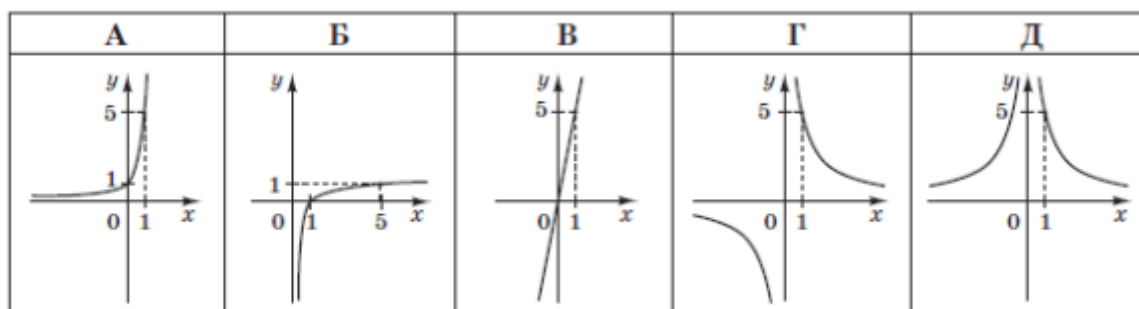
На початку теми «Тригонометричні функції» учні вивчають косинус, синус, тангенс і котангенс кута, потім переходять до вивчення основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу, формул зведення, властивостей та графіків тригонометричних функцій та різних тригонометричних формули.

Тема «Показникова та логарифмічна функції» розглядається в курсі «Алгебри і початків аналізу» в 11 класі. Спочатку відбувається повторення відомостей про функції та вивчення степенів з довільним дійсним показником, після чого вводять поняття показникової функції, розглядають її властивості та графік. Після цього учні розглядають логарифми та їх властивості, натуральний логарифм, властивості та графік логарифмічної функції, логарифмічні рівняння і нерівності, похідну логарифмічної функції [2].

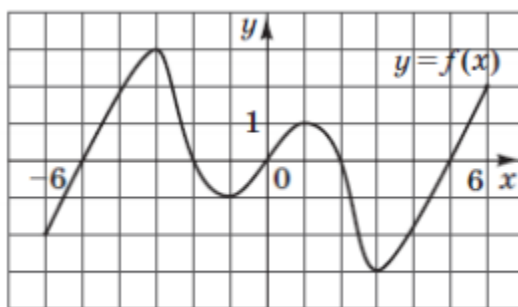
По завершенню 11 класу учні проходять зовнішнє незалежне оцінювання, де кожного року пропонується в середньому 4-5 завдань (близько 20% від усіх завдань), що стосуються функцій.

Наприклад, в 2014 році було запропоновано такі завдання.

1. На якому рисунку зображено ескіз графіка функції $y = \frac{5}{x}$?



2. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Яку властивість має функція $y = f(x)$?



- А. Функція є періодичною
 Б. Функція зростає на проміжку $[-6; 6]$
 В. Функція спадає на проміжку $[-6; 6]$
 3. Установіть відповідність між функцією (1-4) та кількістю спільних точок (А-Д) графіка цієї функції з графіком функції $y = \frac{5}{x}$.

- | | |
|-------------------|--------------|
| 1. $y = x + 5$ | А. жодної |
| 2. $y = 5^x$ | Б. лише одна |
| 3. $y = \sqrt{x}$ | В. лише дві |
| 4. $y = \sin x$ | Г. лише три |

Функціональна лінія пронизує весь курс алгебри і розвивається у тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями і нерівностями. Властивості функцій встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Під час вивчення функцій чільне місце відводиться формуванню умінь будувати і читати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують [15].

Важливою складовою навчального процесу є узагальнення і систематизації знань. В цілому узагальнюючі заняття сприяють систематизації і кращому засвоєнню навчального матеріалу. Систематизація знань невід'ємна від їх узагальнення і чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними зв'язків і відношень, тим ширше коло знань об'єднується в систему. Мета узагальнення не тільки в тому, щоб поновити раніше засвоєнні знання, а і в тому, щоб навчити учнів використовувати вивчений матеріал. Ми вважаємо доцільним проведення спеціальних уроків узагальнення і систематизації знань після вивчення теми або розділу.

Список використаних джерел

1. Мерзляк А. Г. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики 9 клас / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір — К. : Центр навч.-метод. л-ри, 2014. — 253 с.
2. Навчальні програма з математики. [Електронний ресурс]: — Режим доступу: <http://www.mon.gov.ua/>
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. — 2-ге вид. допов. і переробл. — К.: Вища школа, 2006. — 582 с.
4. Харламов І. Ф. Педагогіка: навч. посібник / І. Ф. Харламов. — М.: Гадаріки, 2009. — 519 с.

Анотація. Зубко В. Узагальнення і систематизація при вивченні функціональної лінії в шкільному курсі математики.

У статті обґрунтовано необхідність використання узагальнення та систематизації знань учнів. Розглянуто місце функціональної змістової лінії в державній підсумковій атестації в 9 класі та зовнішньому незалежному оцінюванні в 11 класі.

Ключові слова: узагальнення, систематизація, функція.

Abstract. Zubco V. Generalization and systematization of the study functional lines in the school mathematics course.

In the article the need for generalization and systematization of knowledge of students. The place and the topic "Functions and their graphs" in the state final examination in grade 9 and external assessment in grade 11.

Keywords: aggregation, classification, function.

Максим Каца

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Відомості про число склалися в математиці поступово в результаті тривалого розвитку, яке йшло під дією практичних і теоретичних потреб математики. Так в результаті сформувалось поняття натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних, алгебраїчних та трансцендентних чисел [4]. Але на дійсних числах, шлях розвитку систем чисел не зупинився. Необхідність розширення систем дійсних чисел виникла як наслідок неможливості розв'язання рівняння виду $x^2 + 1 = 0$ в системі дійсних чисел, адже дане рівняння не має дійсних коренів, тому потреба в знаходженні коренів даного рівняння призвела до виникнення комплексних чисел. А саме в 1545 році вийшла у світ книга Джироламо Кардано «Велике мистецтво» в якій було вперше введено комплексні числа, які позначалися як двовимірні числа, а Рафаель Бомбеллі у 1572 році розробив правила роботи з уявними одиницями [2]. На основі комплексних чисел виникла ціла теорія функцій комплексної змінної, яка має велике практичне застосування.

Тому, оскільки комплексні числа виявилися досить важливими і корисними для розвитку математики, виникли ідеї розвинути і узагальнити поняття числа. Так спочатку виникли триплети $a+bi+cj$, які ввів Уільм Гамільтон, а потім кватерніони, де на відміну від триплетів було додано ще одну змінну k , і отримали вигляд $a+bi+cj+dk$. Кватерніони виявилися розширенням комплексних чисел і стали однією із систем гіперкомплексних чисел [1]. Над кватерніонами також можна виконувати арифметичні операції додавання, віднімання, множення, а ділення виконується за допомогою рівнянь $q_2 x = q_1$ і $x q_2 = q_1$, кватерніони є системою з діленням. Для того щоб виконати множення над ними, У.Гамільтон вигадав спеціальну таблицю множення, в рядках і стовпчиках якої знаходяться уявні числа і їх добутки. В системі кватерніонів, як і в дійсних числах виконуються всі властивості відносно операцій додавання і множення, окрім комутативності відносно операції множення. Завдяки кватерніонам можливо описати обертання тривимірного і чотиривимірного евклідових просторів. Також розглядається норма кватерніона, і доводиться, що норма добутку кватерніонів дорівнює добутку норм. В роботі розглядається один з прикладів розв'язання рівняння

$x^2+1=0$ в системі кватерніонів. Де в результаті розв'язання було отримано відповідь про те, що в системі комплексних чисел рівняння має 2 розв'язки: i та $-i$, а в системі кватерніонів їх буде безліч, а ось наприклад в рівнянні $(x-5)^2=9$ коренів в системі кватерніонів чисел буде 2: 8 і 2.

Також наводяться інші підходи до визначення кватерніонів, таких як подання кватерніонів у формі пари комплексних чисел: довільний кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ можна уявити, користуючись тим, що $ij = k$, в вигляді $q = (a + bi) + (c + di)j$ або $q = z_1 + z_2 j$, де $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Нехай поряд з q заданий ще один кватерніон $r = w_1 + w_2 j$. Перемноживши q і r , отримаємо

$$qr = (z_1 + z_2 j)(w_1 + w_2 j) = z_1 w_1 + z_1 (w_2 j) + (z_2 j) w_1 + (z_2 j) (w_2 j) = z_1 w_1 + z_1 w_2 j + j w_1 z_2 + j w_2 z_2 \quad (1)$$

Оскільки $ij = -ji$, то $(a + bi)j = j(a - bi)$, тобто $zj = j\bar{z}$. Крім того, легко перевірити, що будь-які два елементи z і w виду $a + bi$ переставні: $zw = wz$. Виходячи з цих властивостей, можна переписати другі і треті доданки в правій частині (1) відповідно у вигляді $w_2 z_1 j$ і $z_2 w_1 j$, а замість четвертого доданка написати $z_2 w_2 j^2$, або $-w_2 z_2$. Звідси,

$$qr = (z_1 w_1 - w_2 z_2) + (w_2 z_1 + z_2 w_1)j. \quad (2)$$

Звертаючись до подання кватерніона у вигляді $q = z_1 + z_2 j$, відзначимо один важливий момент. Оскільки $i^2 = -1$, то всі кватерніони $a + bi$, зокрема, z_1 і z_2 , можна трактувати як комплексні числа. Значить, кватерніони можна визначити як вираз виду $z_1 + z_2 j$ де z_1, z_2 - довільні комплексні числа, а j - деякий символ, причому закон множення таких виразів задається формулою (2) [2].

Також кватерніони дали поштовх багатьом дослідженням в галузі математики і фізики. Наприклад, завдяки кватерніонам виникла надзвичайно поширена область математики – векторна алгебра. Наприклад, якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через i, j, k вектори довжини 1, які виходять з початку координат і напрямлені вздовж координатних осей, то будь-яка сума виду: $bi + cj + dk$, де b, c, d – дійсні числа, буде представляти собою деякий вектор. Цей вектор йде із початку координат O в точку M з координатами b, c, d . Тоді повертаючись до кватерніонів, помітимо, що кожен кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ являє собою формальну суму дійсного числа a з вектором $bi + cj + dk$. Число a ми будемо називати числовою (або дійсною) частиною, а вираз $bi + cj + dk$ – векторною (або уявною) частиною кватерніона q .

Розглянемо тепер 2 чисто векторних кватерніони $q_1 = bi + cj + dk$ і $q_2 = bi + cj + dk$. Перемножуючи їх по правилу множення кватерніонів, будемо мати:

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k.$$

Випишемо окремо числову і векторну частини кватерніона $q_1 q_2$. Числова частина: $q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2)$. Векторна частина:

$$q_1 q_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k.$$

Далі можна розглянути скалярний добуток двох векторів:

$$(\overline{q_1 q_2}) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

і векторний добуток: нехай $\overline{q_1} = b_1 \bar{i} + c_1 \bar{j} + d_1 \bar{k}$, $\overline{q_2} = b_2 \bar{i} + c_2 \bar{j} + d_2 \bar{k}$,

$$\overline{q_1} \times \overline{q_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (c_1 d_2 - d_1 c_2) \bar{i} + (d_1 b_2 - b_1 d_2) \bar{j} + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \bar{k}.$$

Але на цьому розвиток поняття числа, не завершився. Кватерніони, як можна помітити є подвоєнням системи комплексних чисел. В свою чергу, можна подвоїти систему кватерніонів, в результаті чого ми отримаємо нову гіперкомплексну систему

чисел, так звані октавіони. Це числа виду: $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$, де $a_0, \dots, a_7$ – дійсні числа, а $i_1, \dots, i_7$ – уявні одиниці. Всі арифметичні операції виконуються аналогічно, як і в кватерніонах, але з використанням таблиці уявних одиниць (табл.1). Цю таблицю множення для октавіонної системи придумав А.Келі де, як і в кватерніонах записано всілякі добутки уявних одиниць, використовуючи цю таблицю, можливо легко перемножити будь-які октавіони.

Таблиця 1

1	i	j	k	E	I	J	K
i	-1	k	$-j$	$-A$	$-E$	K	$-J$
j	$-k$	-1	i	$-J$	$-K$	E	I
k	j	$-i$	-1	$-K$	J	$-I$	E
E	$-I$	J	K	-1	$-i$	$-j$	$-k$
I	$-E$	K	$-J$	$-i$	-1	K	$-j$
J	$-K$	$-E$	I	j	$-K$	-1	i
K	J	$-I$	$-E$	K	j	$-i$	-1

Стосовно властивостей октавіонів, то можна сказати про те, що окрім невиконання властивості комутативності по множенню, не виконується, ще і властивість асоціативності по множенню.

Ці числа також можна представити у вигляді пари кватерніонів, аналогічно як кватерніони ми представляли за допомогою пари комплексних чисел.

Цікавою є ще така властивість для октав, як

$$|uv|^2 = |u|^2 |v|^2 \quad (3)$$

де u і v – довільні октавіони, яка говорить про те, що сума восьми квадратів на суму восьми квадратів, є знову сумою восьми квадратів, її ще називають «задача про суму восьми квадратів», вона схожа на задачу про суму чотирьох квадратів, яку розглядають у кватерніонах, і яку ще називають формулою Ейлера.

Розглянемо цю властивість:

нехай $u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$, $v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + B'I + C'J + D'K$, а $uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + \Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K$, тоді рівність (3) приймає вигляд $(a^2 + \dots + D^2)(a'^2 + \dots + D'^2) = \Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \dots + \Phi_7^2$. Зрозуміло, замість $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_7$ сюди слід поставити їх вирази через $a, \dots, D, a', \dots, D'$, виходячи із закону множення октав. Проробивши цю громіздку роботу, прийдемо до такої рівності:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) = \\ & = (aa' - bb' - cc' - dd' - AA' - BB' - CC' - DD')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc' - A'B + B'A + C'D - D'C)^2 + \\ & + (ac' + ca' - bd' + db' - A'C + C'A - B'D + D'B)^2 + (ad' + da' + bc' - cb' - A'D + D'A + B'C - C'B)^2 + \\ & + (A'a - B'b - C'c - D'd + A'a + B'b + C'c + D'd)^2 + (A'b + B'a + C'd + D'c - Ab' + Ba' - Cd' + Dc')^2 + \\ & + (A'c + C'a - B'd + D'b - Ac' + Ca' + Bd' - Db')^2 + (A'd + D'a + B'c + C'b - Ad' + Da' - Bc' + Cb')^2 \quad [5]. \end{aligned}$$

Цікаво відмітити, що саме пошук тотожності для 8 квадратів привів автора системи октав англійського математика А. Келі до їх відкриття!

Висновок. Цей короткий огляд становлення теорії гіперкомплексних числових систем далеко не вичерпує весь матеріал за даною темою. Але з наведеного можна зробити висновок про велику роль гіперкомплексних числових систем для розвитку теоретичних досліджень і виявлення їхньої практичної спрямованості [3].

Список використаних джерел

1. Вивальнюк Л.М. Числові системи. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1977. – 184 с.
2. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
3. Нечаев В.И. Числовые системы. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.
4. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. – М.: Наука, 1986. – 120 с.
5. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. – М.: Наука, 1971. – 440 с.

Каца М. Гіперкомплексні числа.

У статті розглянута основна інформація стосовно того, як відбувалося розширення поняття числа, більш детальніше розглянуто систему комплексних чисел, розглянуто як відбувається розширення комплексних чисел до кватерніонів, розглянуто різні форми подання кватерніонів, а також розглянуто ще одну гіперкомплексну систему чисел – октавіони, і яким чином відбувається перехід від системи кватерніонів до системи чисел – октав.

Ключові слова: *комплексні числа, кватерніони, норма кватерніонів, формула Ейлера, октави, гіперкомплексні числа.*

Kascha M. Hypercomplex numbers.

In this paper the basic information on how to expand the concept of number was more closely examine the system of complex numbers, complex numbers change from their doubling, that quaternions, considered other forms of representation quaternions and hypercomplex consider another system of numbers - oktavyony and how is the transition from the system quaternion numbers - octaves.

Keywords: *Kompleksnye numbers quaternions, the rate quaternions formula Euler oktav, hypercomplex number.*

Юлія Коропець

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

koropets90@mail.ru

Науковий керівник – А.О. Розуменко

УСНІ ВПРАВИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Перевантаженість програми, відсутність системи прийомів раціональних обчислень, недостатність усвідомлення кінцевих цілей навчання математики – причини зниження інтересу до предмета. У підручниках багато визначень, правил, алгоритмів, які треба зрозуміти, засвоїти і навчитися застосовувати. Більшість учнів просто не в змозі запам'ятати великий обсяг матеріалу. Тим часом дуже часто можна спостерігати знайому картину – учні старших класів не можуть швидко і точно виконати найпростіші обчислення в розумі. На це доводиться витратити дорогоцінний час, замість того щоб зайнятися розв'язанням більш складних завдань.

З метою успішного розв'язання даної проблеми в навчально-виховному процесі використовують усні вправи.

Усні вправи є одним із випробуваних засобів, які сприяють кращому засвоєнню курсу математики. Усні вправи важливі тим, що вони активізують розумову діяльність учня; при їх виконанні у дітей розвивається пам'ять, мова, увага, здатність сприймати

сказане на слух, швидкість реакції. При вмілому використанні усних вправ вони відіграють важливу роль у підвищенні ефективності уроку. Основна умова при цьому – розглядати усну вправу не як додатковий матеріал, а як органічно необхідну частину уроку.

Формування обчислювальних умінь та навичок є однією з основних змістовних ліній шкільного курсу математики. Тому, проводячи уроки необхідно особливу увагу приділяти усному рахунку.

На думку А. П. Єршової і В. В. Голобородько «... усні задачі й запитання не обов'язково мають сприйматися «з голосу» і розв'язуватися подумки. Доречніше було б вважати усними будь-які вправи, які не потребують письмового обґрунтування розв'язку» [2].

Отже, до системи усних вправ з певної теми доцільно включити запитання, що стосуються теоретичної частини цієї теми, а також набір нескладних завдань, що спрямовані на закріплення здобутих вправ і відпрацювання вмінь застосовувати набуті знання.

Усна робота не може бути випадковим етапом уроку, а повинна знаходитися у методичному зв'язку з основною темою і носити проблемний характер.

Основними дидактичними функціями цього етапу є:

- відтворення та коригування певних знань, умінь і знань учнів, необхідних для їх самостійної діяльності на уроці чи усвідомленого сприйняття пояснення вчителя;
- контроль вчителя за станом знань учнів;
- психологічна підготовка учнів до сприйняття нового матеріалу;
- розвиток уваги, пам'яті, спостережливості, кмітливості, ініціативності;
- формування пізнавального інтересу;
- активізація навчальної діяльності учнів на уроці.

Виходячи з основних функцій, у зміст усної роботи необхідно включати вправи таких типів:

- на закріплення і відпрацювання поточного матеріалу;
- на повторення раніше вивченого;
- з елементами творчості (наприклад, для підготовки до сприйняття нового матеріалу);
- розвивального характеру.

Учитель повинен орієнтуватися на те, що, виконуючи усні вправи, учні не тільки здобувають обчислювальні навички, а насамперед, закріплюють теоретичні знання, тренують увагу і пам'ять. Зважаючи на те, що усне опитування на уроках математики є однією з основних форм оперативної перевірки знань і вмінь учнів, його треба використовувати на кожному уроці: під час перевірки домашнього завдання, актуалізації опорних знань, фронтального опитування, планового, тематичного обліку знань, а також під час контролю. Зокрема, вдало підібрана система усних вправ сприяє розвитку логічного мислення учнів, підвищує їхню математичну культуру, творчу активність, формує вміння планувати свою діяльність.

Розглянемо особливості усної роботи на уроках в 5–6 класах, оскільки основи обчислювальної культури закладаються в ці роки.

Курс математики 5–6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про числа і дії над ними, числові й буквені вирази, величини та їх вимірювання, рівняння і нерівності, а також уявлень про окремі геометричні фігури і геометричні тіла. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому ступені вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне

вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання [3].

За результатами аналізу навчальної програми з математики для учнів 5–6 класів можна зробити висновок про те, що найважливішими обчислювальними вміннями і навичками є:

- виконання всіх арифметичних дій з натуральними числами;
- виконання основних дій з десятковими числами;
- округлення числа до заданого розряду;
- вміння застосовувати закони додавання і множення до спрощення виразів, визначати порядок дій при обчисленні значення виразу;
- використання ознак подільності на 2, 3, 9, 5 і 10;
- виконання основних дій зі звичайними дробами;
- виконання всіх арифметичних дій з раціональними числами.

Навчальна програми з математики включає достатній обсяг матеріалу щодо формування міцних навичок обчислень, однак, деякі питання розуміння і відпрацювання навичку арифметичних обчислень є для школярів досить складними.

Традиційно складною темою для учнів 5 класів є «Десяткові дроби».

Розглянемо відпрацювання навичок усної лічби при вивченні даної теми.

При проведенні усних вправ важлива роль відводиться дидактичним іграм – сучасному і визнаному методу навчання. У процесі гри в дітей формуються вміння зосереджуватися, мислити самостійно, розвивається увага, прагнення до знань. Захопившись, діти не помічають, що вчаться: пізнають, запам'ятовують нове, поповнюють запас уявлень, понять, розвивають фантазію.

Дидактична гра створює умови для активної навчальної діяльності з імітаційного моделювання систем, явищ і процесів, які вивчаються. У ній навчальна діяльність об'єднується з ігровою, набуваючи ознак цілеспрямованої навчальної діяльності, у процесі якої інформація надходить не ззовні, а є внутрішнім продуктом і результатом цієї діяльності. Одержана в такий спосіб інформація породжує новий рівень знань, який, у свою чергу, сприяє формуванню наступного, вищого, рівня знань [5].

Пропонуємо приклади дидактичних ігор, які можна проводити усно на уроках математики:

Гра «Хто швидше»

Тема. Додавання десяткових дробів

Учням необхідно знайти рядок, стовпець або діагональ, сума чисел в яких дорівнює числу, записаному над таблицею.

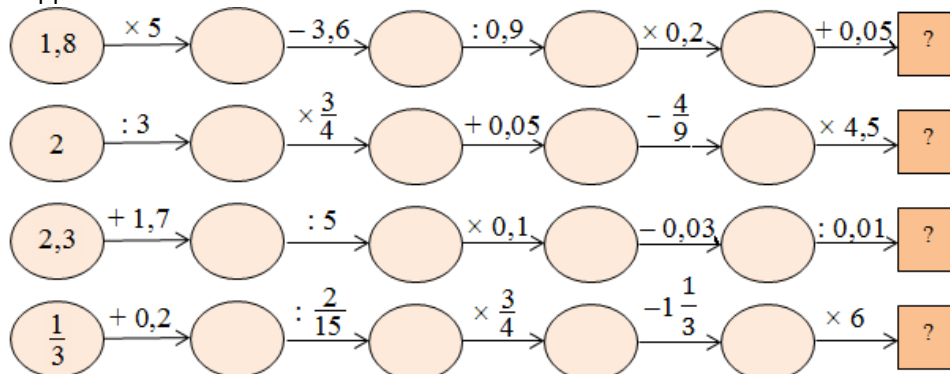
1,5	5,6	12,4
0,4	3,2	5,5
0,9	1,4	2,7
0,6	0,2	1,4
0,5	1,5	3,6
0,8	2,6	7,3
0,3	2,8	4,4
0,1	0,4	9,1
0,5	4,9	2,4
0,2	0,3	0,8

0,32	21	3,25
0,08	6,9	1,04
0,12	8,2	0,9
0,05	4,3	2,81
0,26	8,4	0,41
0,18	5,6	0,25
0,12	7,6	1,6
0,04	3,7	1,8
0,2	9,1	2,7
0,15	8,5	0,03

Гра «Ланцюжок»

Тема. Арифметичні дії з десятковими дробами

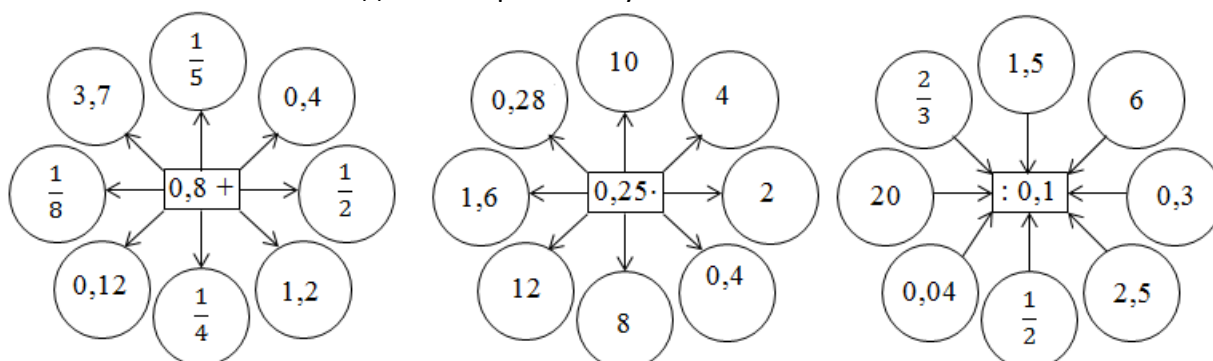
Учні об'єднані у команди (по рядам). Учасники команд по черзі виходять до дошки і виконують відповідні обчислення. Виграє та команда, яка швидко і правильно виконає завдання.



Гра «Естафета»

Тема. Арифметичні дії з десятковими дробами

За вказівкою вчителя діти по черзі виконують обчислення.



Виконання таких вправ активізує пізнавальну діяльність, сприяє розвитку логічного мислення та аналітичних здібностей учнів, стимулює і підвищує інтерес до навчання.

Щоб виконання вправ мало пізнавальний характер, можна зашифрувати дати подій, наприклад, дати життя визначних математиків, з біографіями яких знайомляться учні на уроці. Можна запропонувати учням відгадати задумане слово, або вислів про математику, розставивши послідовно букви, що відповідають правильним розв'язкам.

Це завдання типу:

Тема. Порівняння десяткових дробів

Завдання 1. Розташуй числа в порядку збільшення і розшифруй слова. Що вони означають?

8,5	-2,19	-2,9	-15	$-9\frac{1}{3}$	-16,4	3	-9,2
Я	Ц	Е	Р	А	Т	І	П
-7,8	-60	0	$-52\frac{4}{7}$	-0,4	-39,6	5,6	$-18\frac{6}{7}$
Т	Т	И	Р	Н	И	К	У

Тема. Арифметичні дії з десятковими дробами

Завдання 2. Обчисли і розшифруй назву металу, який плаває у воді

3,8	0,57	87,8	4,16	5
- 1,4	- 0,37	+ 0,5	+ 1,2	- 2,6
$\times 0,1$	+ 1,82	- 0,63	$\times 10$	: 0,1
- 0,02	: 0,01	$\times 0,01$	- 51,4	+ 3,25
$\times 100$	: 100	- 1,4	: 0,01	- 7,05
I	I	Й	Т	Л

20,2	22	220	2,02	2,22

Тема. Множення десяткових дробів

Завдання 3. Знаючи, що $728 \times 5609 = 4\,083\,352$, знайди правильні відповіді. Із відповідних букв склади назву сузір'я.

$7,28 \times 56,09$	40,83352 (Н)	4083,352 (О)	408,3352 (И)	4,083352 (Й)
$72,8 \times 0,5609$	0,4083352 (А)	408,3352 (В)	4,083352 (Д)	40,83352 (Р)
$7280 \times 5,609$	408,3352 (С)	40,83352 (К)	40833,52 (И)	4083,352 (М)
$7,28 \times 0,5609$	0,4083352 (Л)	4,083352 (И)	40,83352 (Т)	408,3352 (Б)

Тема. Порівняння десяткових дробів

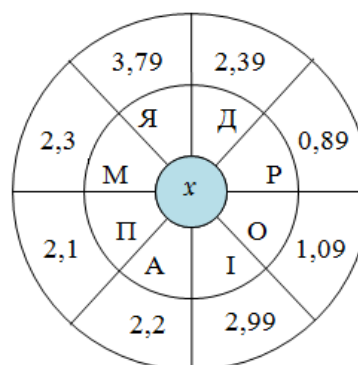
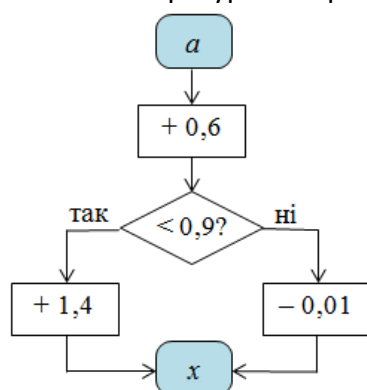
Завдання 4. Серед чисел, записаних праворуч від нерівності, виберіть ті, які не задовольняють дану нерівність. Із відповідних літер складіть математичні терміни. Що вони означають?

$2,7 < x < 3,06$	2,7 (С)	2,95 (А)	2,079 (Т)	3,005 (В)
$0,46 < x < 0,56$	0,5207 (К)	0,409 (Е)	5,3 (П)	0,508 (Л)
$8,25 < x < 8,3$	8,08 (І)	8,298 (И)	9,01 (Н)	8,2561 (Д)
$1,003 < x < 1,4$	1,03 (С)	1,5 (Б)	1,099 (Б)	1,243 (О)

Досить цікавою формою проведення усного рахунку є використання блок-схем.

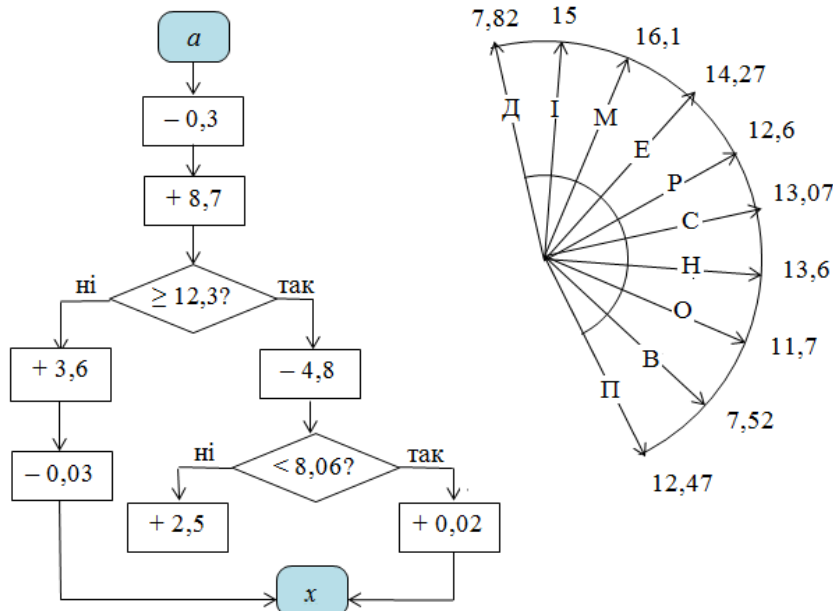
Тема. Додавання і віднімання десяткових дробів. Порівняння десяткових дробів. Розшифруйте назви літературних термінів. Поясніть їх значення?

а)



a	0,1	0,2	0,3	0,5	1,8	2,4	3,2
x							
літера							

б)



a	0,5	1,1	2,3	3,9	4,2	5,6	7,5	8,9	10
x									
літера									

Робота з блок-схемами передбачає розвиток алгоритмічного мислення, формування уміння діяти за заданим алгоритмом і конструювати нові.

Незважаючи на позитивне сприяння усної роботи засвоєнню знань, формуванню вмінь та навичок, не слід надмірно нею захоплюватися. Важливо, щоб усна робота була органічно пов'язана і збалансована з письмовими видами роботи на уроці. Проведення усної роботи є одним із засобів навчання математики, а не є самоціллю.

Список використаних джерел

1. Буряк Н. Про усну лічбу та деякі прийоми обчислень у курсі математики 5-6 класів / Н. Буряк // Математика в школі. – 2004. – № 9-10. – С. 37-41.
2. Ковальська Н. Усні завдання у навчанні геометрії / Н. Ковальська // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 18-21.
3. Навчальна програма для учнів 5 – 9 класів для загальноосвітніх навчальних закладів: Математика. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 128 с.
4. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид, допов. і переробл. / З. І. Слєпкань – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.
5. Чайка В. М. Основи дидактики: навч. посіб. / В. М. Чайка. – К.: Академвидав, 2011. – 240 с.

Анотація. Коропець Ю. Усні вправи на уроках математики в основній школі.

У статті розкрито зміст поняття «усні вправи». Подано систему усних вправ, які доцільно використовувати під час вивчення теми «Десяткові дробі».

Ключові слова: усні вправи.

Annotation. Koropets J. Oral exercises in mathematics lessons in basic school.

The article deals with the concept of «oral exercises». Posted system of oral exercises that should be used when studying the topic «Decimal fractions».

Keywords: oral exercises.

Олександр Кушнерьов

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

k-a-s2008@ukr.net

Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Графи – це унікальні математичні об'єкти, за допомогою яких можна розв'язувати математичні, економічні та логічні задачі, спрощувати та моделювати фізичні та хімічні процеси і явища, хімії, складати схеми і графіки. Окрім того, мовою теорії графів зручно ілюструвати цілу низку математичних фактів.

Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася у 1736 році та була присвячена розв'язуванню задачі про Кенігсберзькі мости. Питання полягало в тому, чи можна здійснити прогулянку містом так, щоб виходячи з дому, повернутися назад, пройшовши в точності по одному разу кожен із семи мостів.

Цю задачу можна представити у вигляді геометричної схеми, на якій точки зображують частини суші, а лінії, їх з'єднують – мости. (рис. 1)

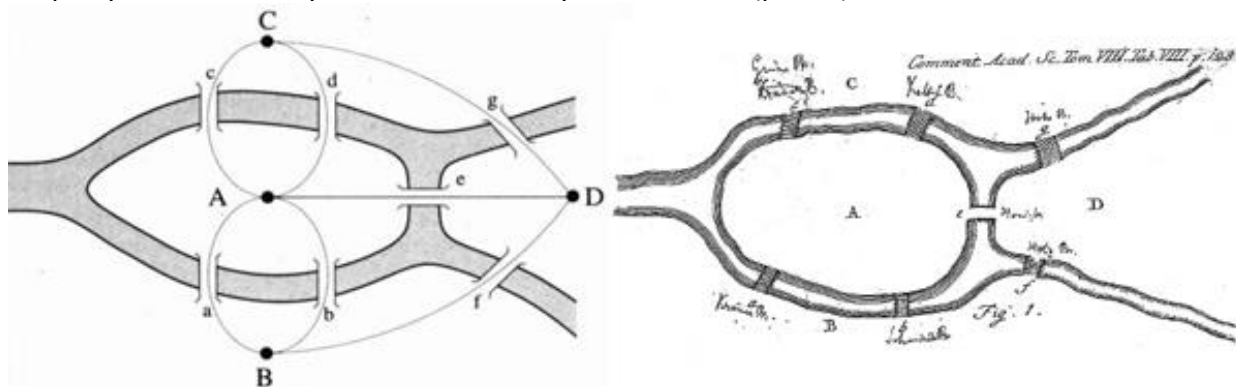


Рис. 1. Схема Кенігсберзьких мостів

Спочатку теорія графів відігравала незначну роль у математиці, оскільки займалася, в основному, математичними розвагами і головоломками. Проте, подальший розвиток математики та її застосувань дав сильний поштовх до розвитку теорії графів. Вже у XIX сторіччі графи стали використовуватися при побудові схем електричних ланцюгів і молекулярних схем. Окрім того, вони дозволяють наочно і просто розв'язати цілу низку практичних завдань, зокрема: на встановлення різного виду відповідностей, аналізі транспортних задач, задач про потоки в мережах нафтопроводів тощо [1].

Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною

формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ. Великою мірою це пов'язано з виникненням, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру. Математичні методи, які значною мірою використовувались лише у фізиці, стали успішно застосовуватись у інших сферах людської діяльності. І одним із потужних інструментів такого використання є граfi [2].

Із суто формальної точки зору граф можна розглядати як один з різновидів алгебраїчної системи (а саме, як модель), а отже, і всю теорію графів – як розділ сучасної алгебри. У наш час теорія графів застосовується в багатьох розділах математики, фізики, біології, хімії, медицині, історії, лінгвістиці, соціальних науках, техніці тощо.

Найширші застосування теорія графів знайшла у математиці при розв'язуванні логічних завдань і головоломок. Основою застосування графів для розв'язування логічних задач є виявлення і послідовне виключення можливостей, заданих в умові. Це виявлення логічних можливостей часто може бути витлумачено за допомогою побудови та розгляду відповідних графів. На приклад, нехай є кілька різних вакантних посад і група людей, які бажають їх зайняти, причому кожен із претендентів достатньо кваліфікований для кількох, але не для всіх наявних посад. Чи можна кожного з цих людей призначити на одну з тих посад, які йому підходять?

Ми можемо знову проілюструвати цю задачу за допомогою деякого графа. Як уже сказано, є певна група (множина) людей, яку ми позначимо як M , і деяка множина посад P . Будемо граф, проводячи ребра (m_i, p_j) , що з'єднують кожну людину m_i з тими посадами p_j , які вона може зайняти. На цьому графі не буде ребер, що з'єднують між собою дві вершини з множин M чи P , тому такий граф є двочастковим (див. рис. 2).

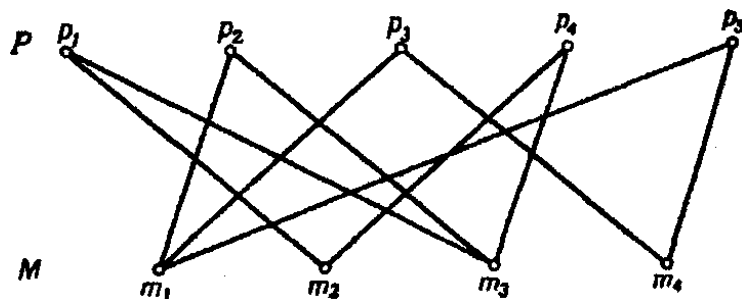


Рис. 2. Зображення зв'язків між людьми та посадами

Знайти підходяще місце для кожного з претендентів можна лише за умови, що посад буде не менше, ніж претендентів. Але ця умова не є недостатньою. Нехай, наприклад, група претендентів складається із двох столярів і особи, яка може працювати і столяром і сантехніком, і для них є чотири посади: одне місце столяра і три місця сантехніка. Тоді, очевидно, один столяр залишиться без роботи, хоча в даному випадку місць більше, ніж претендентів, і хоча серед претендентів є люди що можуть працювати на двох посадах.

Припустимо, що загальна кількість претендентів – N . Для виконання задачі повинна виконуватись наступна умова: яку б групу із k чоловік, $k=1,2,...,N$, ми не взяли, повинно бути принаймні k посад, кожну з яких може займати хоча б один із претендентів. Наприклад, якщо один з претендентів є столяром, а другий – одночасно і столяром і сантехніком, і є два місця сантехніка, то наша умова виконується при $k=2$, але не виконується при $k=1$, тому вказані люди не можуть одночасно влаштуватися на роботу.

Виділену умову ми коротко назвемо *умовою різноманітності*. Вищенаведена задача може використовуватись працівниками служби зайнятості для правильного розподілу працівників на посади.

Розглянемо тепер деякі застосування теорії графів у деяких галузях людської діяльності.

Графи й інформація. У теорії інформації значну роль відіграють так звані двійкові дерева. Нехай потрібно закодувати певну кількість повідомлень у вигляді скінченних послідовностей з нулів і одиниць. Якщо ймовірності кодових слів задано, то найкращим вважається код, у якому середня довжина слів мінімальна у порівнянні з іншими розподілами ймовірності. Завдання про побудову такого оптимального коду дозволяє розв'язати алгоритм Хаффмана [3].

Двійкові кодові дерева допускають інтерпретацію в рамках теорії пошуку. Кожній вершині при цьому зіставляється питання, відповіді на яке можна або «так», або «ні». Позитивним і негативним відповідям відповідають два ребра, що виходять з вершини. «Опитування» звершується, коли вдається вставити те, що було потрібно. Таким чином, якщо комусь знадобиться взяти інтерв'ю у різних людей, і відповідь на чергове запитання залежатиме від заздалегідь невідомої відповіді на попереднє запитання, то план такого інтерв'ю можна представити у вигляді двійкового дерева [3].

Графи в хімії використовуються для складання формул. «Хімічні» графи дають можливість прогнозувати хімічні перетворення, пояснювати сутність і систематизувати деякі основні поняття хімії: структуру, конфігурацію, конфірмації, кванта-механічні та статистико-механічні взаємодії молекул та ін. До хімічних графам відносяться молекулярні, дводольні та сигнальні граfi кінетичних рівнянь реакцій.

Молекулярні граfi, що використовуються в стереохімії та структурній топології, хімії кластерів, полімерів являють собою неорієнтовані граfi, що відображають будову молекул (рис. 3) [4].

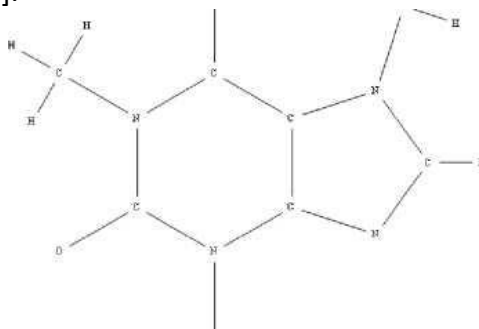


Рис. 3. Приклад молекулярного графа

Ще наприкінці XIX століття А. Келі розглянув задачу про можливі структури насичених (або граничних) вуглеводнів, молекули яких задаються формулою C_nH_{2n+2}

Молекула кожного граничного вуглеводню являє собою дерево. Якщо видалити всі атоми водню, то решта атоми вуглеводню також будуть утворювати дерево, кожна вершина якого має степінь не вище 4. Отже, число можливих структур граничних вуглеводнів, тобто число гомологів даної речовини, дорівнює числу дерев з вершинами степеня не більше чотирьох.

Таким чином, підрахунок числа гомологів граничних вуглеводнів також призводить до задачі про перерахування дерев певного типу. Це завдання і її узагальнення розглянув Д. Пойа. [3]

Графи відіграють велику роль у **біологічній теорії** розгалужених процесів. Для простоти розглянемо тільки один різновид розгалужених процесів – розмноження

бактерій. Припустимо, що за певний проміжок часу кожна бактерія або ділиться на дві нові, або гине. Тоді для потомства однієї бактерії ми матимемо двійкове дерево.

Нас цікавитиме лише запитання: в скількох випадках n -е покоління однієї бактерії налічує рівно k нащадків? Рекурентне співвідношення, що означає число необхідних випадків, відоме в біології під назвою процесу Гальтона-Ватсона. Його можна розглядати як окремий випадок багатьох загальних формул (рис. 4)[4].

У медицині у вигляді графа можна подати схему переливання крові (рис. 5)[4].

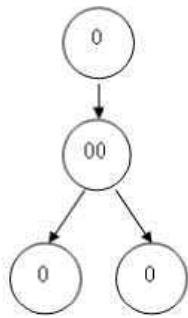


Рис. 4. Бінарний граф розмноження бактерії

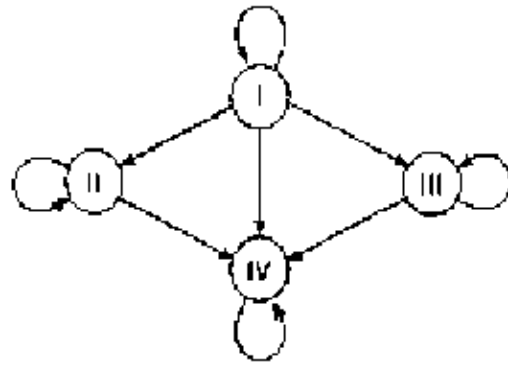


Рис. 5. Схема переливання крові

На цій схемі види груп крові людини відповідають вершинам графа, а стрілками показано, яку кров можна переливати людині з даною групою крові.

Графи у фізиці є топологічними моделями схем електричних ланцюгів.

Ще донедавна одним з найбільш складних завдань для радіоаматорів було конструювання друкованих схем. *Друкованою схемою* називають платівку з якогось діелектрика (ізолюючого матеріалу), на якій у вигляді металевих смужок витравлені доріжки. Перетинатися доріжки можуть тільки в певних точках, куди встановлюються необхідні елементи (діоди, тріоди, резистори та інші), їх перетин в інших місцях викличе замикання електричного ланцюга.

Для розв'язання цього завдання необхідно побудувати плоский граф, вершини якого відповідають вузлам з'єднань, а ребрам – металеві доріжки, на яких при необхідності вказується напрямок струму або потоку потужності. (рис. 6).

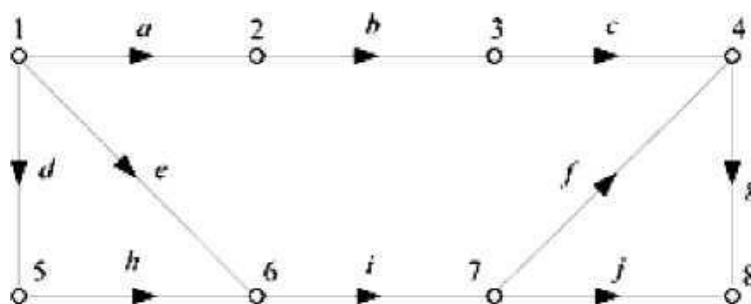


Рис. 6. Граф електромережі

Широке застосування знаходять графи у **психології** та **соціології**. Багато соціологічних і соціально-психологічних завдань розв'язуються із використанням теорії графів. Зокрема, це задачі, пов'язані з формалізацією та побудовою загальної структурної моделі соціального об'єкта на різних рівнях його складності. Це може бути структурна схема організації, соціограма, порівняння систем спорідненості в різних

суспільствах, аналіз рольової структури групи і т.д. Можна вважати, що рольова структура включає три компоненти: особи, позиції (в спрощеному варіанті посади) і завдання, що виконуються в даній позиції. Кожна компонента може бути представлена у вигляді графа (рис 7).

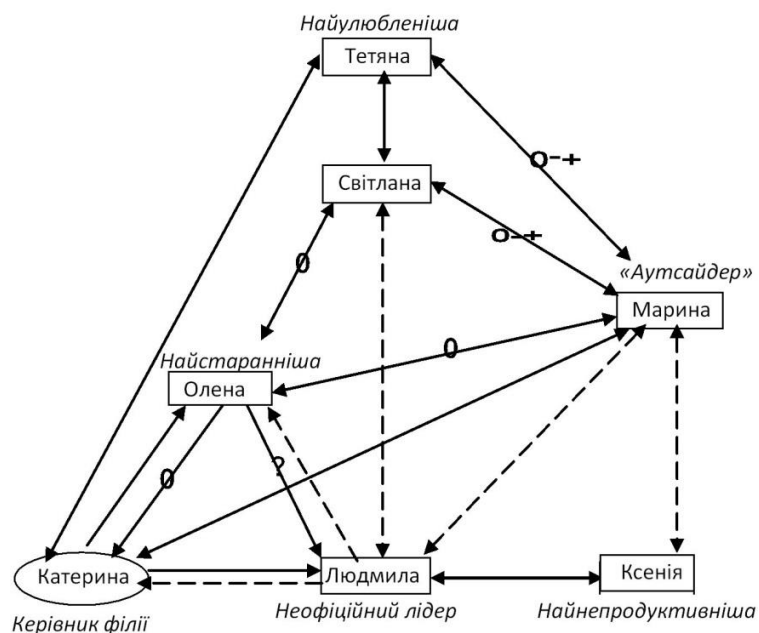


Рис. 7. Структура соціограми

Елементи теорії графів використовуються і **в екології**. Природні співтовариства характеризуються складною будовою та розподіляються за рівнями, між якими існують різноманітні трофічні (харчові) і топічні (не пов'язані з ланцюгом харчування) зв'язки. Структура трофічної піраміди може бути дуже різною, залежно від клімату, ґрунту, ландшафту, тривалості існування біогеоценозу та інших факторів [7].

При аналізі біологічних співтовариств, прийнято будувати харчові або трофічні мережі, тобто графи, вершини яких відповідають видам, що входять до спільноти, а ребра вказують трофічні зв'язки між ними. Зазвичай такі графи орієнтовані: напрямок дуги між двома вершинами вказує на той з видів, який є споживачем іншого, тобто напрямок дуги збігається з напрямком потоку речовини або біомас в системі (рис. 8) [4].

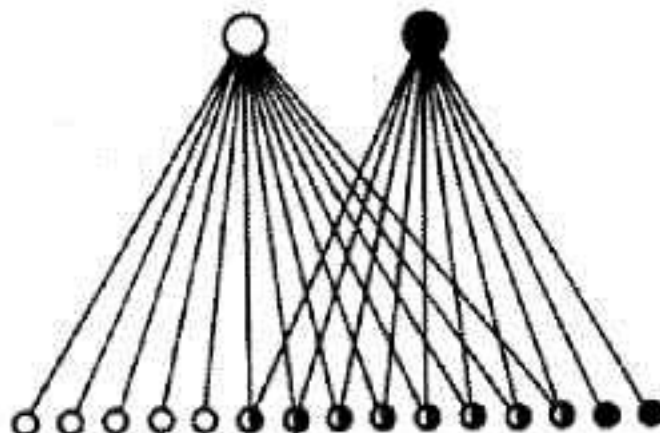


Рис. 8. Приклад двох вікової трофічної піраміди

Теорія графів знайшла своє застосування і в **архітектурі та будівництві**. При складанні великих проектів, що містять різні види робіт часто виникає ситуація, коли ту чи іншу роботу можна почати лише після закінчення інших. Так при будівництві будинку не можна приступити до оздоблювальних робіт, поки не зведені стіни, і не можна зводити стіни до укладання фундаменту. Послідовність робіт зображується у вигляді мережеских графіків. (рис. 9). Вони застосовуються при плануванні діяльності підприємства, де визначаються критичні шляхи, резерви часу тощо [6].

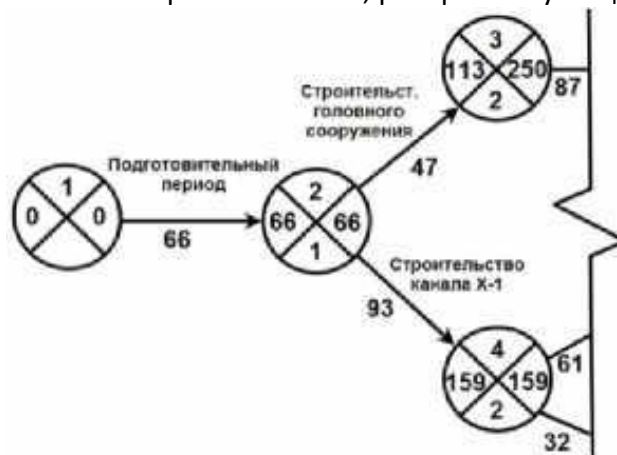


Рис. 9. Застосування графа в будівництві

Крім наведених прикладів, графи широко використовуються в економіці, електротехніці, менеджменті, логістиці, географії, машинобудуванні, програмуванні, автоматизації технологічних процесів і виробництв, психології, рекламі тощо.

Список використаних джерел

1. Розв'язування задач за допомогою графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://ua-referat.com/Розвязування_задач_за_помогою_графів
2. Березина Л.Ю. Графи и их применение: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979, 144 с.
3. Теорія графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://bukvar.su/matematika/page,2,133637-Teoriya-grafov.html>
4. Применение элементов теории графов в различных сферах научной деятельности [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.kspi.kz/files/articles/matem_2012_1-112-116.pdf
5. Применение теории графов [Електронний ресурс] / Режим доступу: <https://sites.google.com/a/labore.ru/teoria-grafov-i-ee-primenenie/integracionnaa-svaz>
6. Фридман И. Научные методы в архитектуре./ И.Фридман. пер. с англ. А.А. Воронина – М.: Стройиздат, 1983. – 160 с.
7. Методичні основи вибору напрямів екологічно спрямованого інноваційного розвитку на різних рівнях [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream/123456789/24477/1/1.3_prokopenko_kasyanenko.pdf

Анотація. Кушнерьов О. Про деякі застосування теорії графів.

У статті розглянуто деякі застосування теорії графів в науці та техніці, а саме як графи застосовуються в інформації, хімії, біології, медицині, фізиці, екології, психології та соціології, архітектурі та будівництві.

Ключові слова: графи, графи й інформація, графи в хімії, біології, медицині, фізиці, екології, психології та соціології, архітектурі та будівництві.

Abstract. Kushnerov O. On some applications of graph theory.

The paper considers some applications of graph theory in science and technology, in particular as graphs used in information science, chemistry, biology, medicine, physics, ecology, psychology, sociology, architecture and construction.

Keywords: *graphs, graphs and information graphs in chemistry, biology, medicine, physics, ecology, psychology, sociology, architecture and construction.*

Олександр Кушнерьов

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

k-a-s2008@ukr.net

Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

РОЗФАРБОВУВАННЯ ГРАФІВ

Останнім часом графи і пов'язані з ними методи досліджень органічно пронизують на різних рівнях чи не всю сучасну математику. Теорія графів входить як окремий розділ у дискретну математику, розглядається як одна з гілок сучасної топології та має безпосереднє відношення до алгебри і теорії чисел.

Родоначальником теорії графів вважається Леонард Ейлер. У 1736 році в одному зі своїх листів він сформулював і запропонував розв'язок задачі про сім Кенігсберзьких мостів, що стала згодом однією з класичних задач теорії графів.

Поштовх до розвитку теорія графів отримала на рубежі XIX і XX століть, коли різко зросла кількість робіт в сфері топології та комбінаторики, з якими її пов'язують тісні узи спорідненості. Графи стали використовуватися при побудові схем електричних кіл і молекулярних схем. Як окрема математична дисципліна теорія графів була вперше представлена в роботі угорського математика Кеніга в 30-тих роках XX століття.

Без теоретико-графових алгоритмів важко уявити сучасне програмування. У цьому контексті слід відмітити задачі, пов'язані з представленням програм у вигляді теоретико-графових моделей, найважливішою з яких є графова. Особливо важливе місце вони займають при моделюванні процесів та явищ [1].

Окрім того, сферами застосування граф-моделей є використання обчислювальних ресурсів системи, організація великих масивів інформації, збільшення степеня паралелізму програми, підвищення ефективності роботи багатопроцесорних і багатомашинних систем. Розв'язання цих та інших задач привело до появи великої кількості граф-моделей, пов'язаних як з параметрами та структурами даних, так і з обчислювальними системами.

Окрім того, графи знайшли своє застосування в теорії планування та управління, теорії розкладів, соціології, математичній лінгвістиці, економіці, біології, медицині, географії. Широке застосування знаходять графи в таких областях, теорія скінченних автоматів, електроніка, у розв'язанні ймовірнісних і комбінаторних задач, знаходженні максимального потоку в мережах, найкоротшої відстані між вершинами графа, максимального паросполучення, перевірки планарності графа тощо.

Як особливий клас можна виділити задачі оптимізації на графах. Математичні розваги і головоломки також є частиною теорії графів. Зокрема, однією із важливих

задач на графах є задача розбиття або розфарбування множини його вершин чи ребер [2], а також знаменита проблема чотирьох фарб [3].

Зазвичай, коли мова заходить про розфарбування графів, майже завжди мають на увазі фарбування їх вершин. Оскільки графи, в яких є петлі, неможливо правильно розфарбувати, то вони не є предметом обговорення. Термінологія, в якій мітки називаються кольорами (фарбами), походить від розфарбовування політичних карт. Розфарбування з використанням k кольорів називається k -розфарбуванням. Найменше число кольорів, необхідне для розфарбування вершин графа G називається його *хроматичним числом* і часто позначається $\chi(G)$. Основною проблемою при відшуванні хроматичного числа графа є те, що компоненти розбиттів або декомпозицій в існуючих напрямках теорії графів мають бути зв'язними, в той час як компоненти оптимальних розбиттів, як правило, виявляються незв'язними. Це значно ускладнює застосування традиційних методів теорії графів для розв'язання задач на розбиття [4].

Вершинне розфарбування називається *власним (правильним)*, якщо жодні дві суміжні вершини не пофарбовані в один колір. Підмножина вершин, виділених одним кольором, називається *кольоровим класом*, кожен такий клас формує незалежний набір. Таким чином, k -розфарбування – це те ж саме, що і розбиття вершин на k підмножин, що не перетинаються [5].

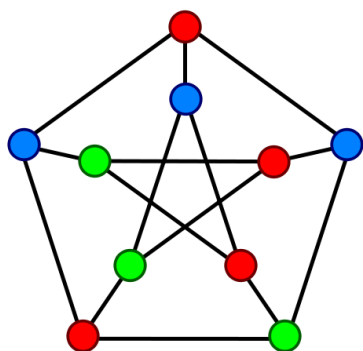


Рис. 1. 3-розфарбування графа Петерсена

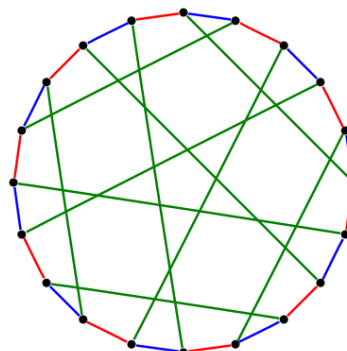


Рис. 2. Правильне реберне розфарбування кубічного графа

Аналогічно, *власним (правильним) реберним розфарбуванням* графа називається присвоювання ребрам графа певних «кольорів» таким чином, що ніякі два суміжних ребра не фарбуються в один і той же колір. Наприклад, на рисунку 2 подано реберне розфарбування графа в червоний, синій і зелений кольори. *Реберно-хроматичним числом (або хроматичним індексом)* графа називають найменше число кольорів, необхідне для правильного розфарбування ребер графа. При знаходженні правильних вершинних чи реберних розфарбувань графів виникає питання: чи можна правильно розфарбувати вершини (ребра) заданого графа максимум в k різних кольорів для заданого значення k або ж навпаки – знайти мінімальне можливе число кольорів [5].

Наприклад, ребра графа на рисунку 2 можна правильно розфарбувати в три кольори, але не можна розфарбувати в два, отже, граф має хроматичний індекс три.

Окрім задачі відшування найменшого числа кольорів, у які можна правильно розфарбувати вершини (ребра) графа, виникає задача пошуку усіх можливих правильних розфарбувань у задане число кольорів. Число можливих варіантів правильного розфарбування вершин графа з використанням не більше ніж заданого числа кольорів розв'язується із використанням хроматичного многочлена [5]. Наприклад, граф на рисунку 3 може бути розфарбований 12 способами з використанням 3 кольорів.

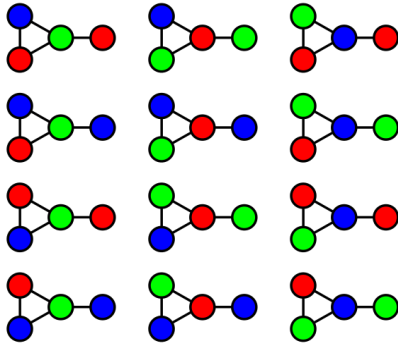


Рис. 3. Правильні розфарбування графа у 3 кольори

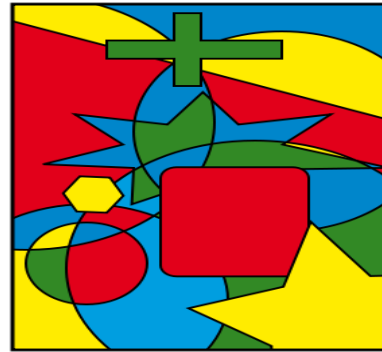


Рис. 4. Розфарбування плоского графа у чотири кольори

Історично поняття хроматичного числа виникло з проблемою чотирьох фарб. Проблема виникла в математиці в середині 19 століття. Спочатку питання формулювалося наступним чином: знайти найменше число кольорів для розфарбування географічної карти, якщо сусідні країни розфарбовані в різні кольори? Під географічною картою розуміють розбиття площини на скінченне число зв'язних областей (країн), межі яких складаються із замкнутих неперервних ліній без самоперетинів, а сусідніми вважаються країни, що мають спільну границю.

Досить очевидно, що трьох фарб недостатньо, тому питання формулювалося зазвичай у більш конкретному виді: чи достатньо чотирьох фарб для розфарбування будь-якої географічної карти? Це і є проблема чотирьох фарб [6].

Задача розфарбування географічних карт зводиться до пошуку правильного розфарбування вершин плоских графів, що є двоїстими до заданої плоскої карти. Проілюструємо це зведення картою, зображеної на рисунку 5.

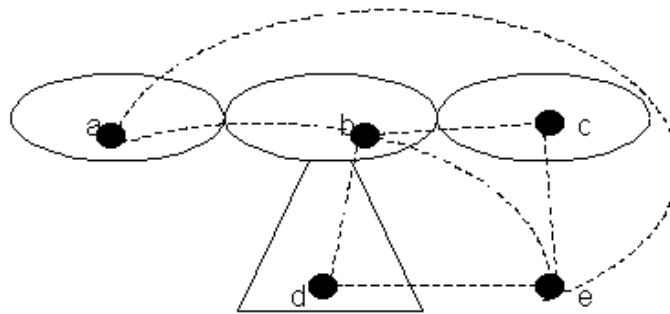


Рис. 5. Побудова двоїстого графа

На рисунку 5 зображено карту, що має п'ять країн (зовнішня область – теж країна). Усередині кожної області зафіксуємо точку (вершину двоїстого графа), та з'єднаємо точки дугами, якщо відповідні країни мають спільний кордон (на рис. 5 ребра проведено пунктирними лініями). При цьому ребра можна зобразити так, щоб вони не перетиналися, тобто щоб отриманий граф також був плоским. Зрозуміло, що розфарбування карти визначає правильне розфарбування вершин графа і навпаки. Тому проблему чотирьох фарб можна сформулювати наступним чином: чи достатньо чотирьох фарб для правильного розфарбування вершин плоского графа [6].

Ця проблема виникла вона при створенні географічних карт. У 1852 році Френсіс Гетрі, складаючи карту графств Англії, звернув увагу, що для того, щоб розфарбувати карту так, щоб два графства, що мають спільну границю, були забарвлені по-різному, цілком вистачає чотирьох фарб. Його брат, Фредерік, повідомив про це спостереження

відомого математика Августа де Моргана, а той – математичну громадськість. Широку популярність проблема чотирьох фарб набула після того, як в 1878 році видатний математик Артур Келі повідомив, що він розмірковував над цією задачею, але так і не зумів її розв'язати[7].

Задача розфарбовування карти на площині еквівалентна аналогічній задачі на сфері. Для простих карт як правило, достатньо і трьох кольорів, четвертий колір потрібен, наприклад, тоді, коли є одна область, оточена непарним числом інших, які дотикаються одна одній, утворюючи цикл. Теорема про п'ять фарб, що стверджує, що для правильного розфарбування плоскої карти досить п'яти кольорів, мала коротке і нескладне доведення і була доведена наприкінці XIX століття. Проте обґрунтування аналогічного результату у випадку чотирьох кольорів наштовхнулося на значні труднощі.

Теорема про чотири фарби була доведена в 1976 році Кеннетом Апелем і Вольфгангом Хакеном з університету Ілінойса. Це була перша велика математична теорема, доведена за допомогою комп'ютера. Першим кроком у доведенні було обґрунтування факту, що існує певний набір з 1936 карт, жодна з яких не може містити карту меншого розміру, яка спростовувала б теорему. К.Аппель і В. Хакен використали спеціальну комп'ютерну програму, щоб довести цю властивість для кожної з 1936 карт. Доведення цього факту зайняло сотні сторінок. Після цього К.Аппель і В.Хакен дійшли висновку, що не існує контрприкладу до теореми, тому що інакше він мав би містити якусь із цих 1936 карт. Це протиріччя говорить те, що взагалі не існує контрприкладу до відповідної теореми.

Спочатку нетрадиційне «комп'ютерне» доведення не було прийняте математичною спільнотою, оскільки його неможливо було перевірити вручну. Проте згодом воно отримало визнання, хоча у деякого з прихильників традиційних доведень ще довгий час залишалися сумніви. Щоб розвіяти їх, у 1997 році Робертсон, Сандерс, Сеймур і Томас опублікували простіше доведення, в якому використовуються аналогічні ідеї, але як і раніше виконане за допомогою комп'ютера. Крім того, в 2005 році доведення було проведене Дж. Гонтиром з використанням спеціалізованого програмного забезпечення, проте комп'ютерна частина все ще залишалася швидше предметом віри. Адже навіть перевірка роздруківок усіх програм і усіх вхідних даних не може виключити випадкові збої або приховані вади електроніки [7].

Проблема чотирьох фарб, яка на перший погляд здавалася ізольованим завданням, навіть грою, мало пов'язаною з іншими розділами математики та практичними застосуваннями, знаходить у наш час найнесподіваніші застосування. Відомо понад двадцять формулювань цієї проблеми, які пов'язують її з конкретними задачами алгебри, статистичної механіки і задачами планування. І це ще раз підкреслює всюдисущий характер математики: розв'язок задачі, що вивчається з чистої цікавості, виявляється корисним в описі реальних і абсолютно різних за своєю природою об'єктів і процесів [7].

Список використаних джерел

1. Касьянов В.Н., Евстигнеев В. А. Графе в программировании: обработка, визуализация и применение. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – С.Пб. и др.: Питер, 2003. – 301 с.
3. Теорія графів [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_графів

4. Протасов І.В., Протасова К.Д. Розкладність графів: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 73 с.
5. Графы. Красиво, наглядно, интересно [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.tofmal.ru/projects/graphs/kraski.html>
6. Дискретная математика [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://pgap.chat.ru/zap/zap253.htm>
7. Проблема чотирьох фарб [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/16985/1/371.pdf>

Анотація. Кушнеров О. Розфарбовування графів.

У статті розглянуто розфарбовування графів, поняття хроматичного числа та проблему чотирьох фарб. Наведено приклади розфарбування графів в вигляді малюнків.

Ключові слова: *графи, хроматичне число, розфарбування графу, проблема чотирьох фарб.*

Abstract. Kushnerov O. Coloring of graphs.

The article considers coloring of graphs, the concept of chromatic number and the problem of four colors. Examples of coloring graphs in the form of drawings.

Keywords: *graphs, chromatic number, coloring graph problem four colors.*

Ганна Мащенко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

mouse16@i.ua

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

ФУНКЦІЇ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У процесі наукового пізнання використовується велика кількість методів, адже завдяки їм науковці можуть прогнозувати, передбачати, аналізувати, розв'язувати проблеми в різних галузях науки.

У логічному словнику «метод» тлумачать, як підхід до явищ природи й суспільства; шлях, спосіб досягнення мети, прийом теоретичного дослідження або практичного здійснення чого-небудь, що виходить зі знання, найбільш загальних закономірностей розвитку об'єктивної дійсності й специфічних закономірностей предмета, явища, процесу, які досліджуються [6, 301с.]

У економічному словнику визначаються такі поняття, як методи аналізу та економіко-математичні методи; дослідивши зміст цих понять можна в певній мірі зрозуміти роль математичних методів в економіці. Під методами аналізу розуміють аналітичний апарат дослідження економічних процесів, а під економіко-математичними методами – комплекс наукових дисциплін, що знаходяться на межі економіки, математики і кібернетики та оперують моделями економічних процесів [7, С. 268-269].

Модель (від лат. «modulus» – зразок, норма, міра) – це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження; під економіко-математичною моделлю розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Розвиток методології економіко-математичного моделювання має довгу історію. Становлення двох по суті різних наукових дисциплін – економіки і математики – протягом багатьох століть проходило за власними законами, що відображали природу цих дисциплін.

Автором поняття «економетрія» є Павло Чомпа, який опублікував низку праць з економіко-статистичної тематик. У першій половині 1910 р. він завершив дослідження «Нариси економетрії», яке заклало основу економетрії. Запропонована Чомпою теорія ґрунтувалася на теорії цінності, що відрізняло її від тогочасного алгебраїчного методу оцінювання майна. Якщо останній оцінював лише майно, вільне від боргів, то теорія Чомпи принципово розрізняла майно та капітал.

Економетричне дослідження П. Чомпи вперше перевірили на практиці викладачі Торгової академії у Львові. Лауреат Нобелівської премії з економетрії Раґнар Фріш визнав, що до появи його статті у 1926 році, присвяченої економетрії, з цієї проблеми у 1910 році була опублікована монографія Чомпи. Ернст Р. Берндт у своєму підручнику з економетрії називає П.Чомпу автором поняття «економетрія». Цей термін Павлом Чомпою був введений німецькою мовою як *Oekonometrie* [1].

До 1930-х років склалися всі передумови для виділення економетрії в окрему науку. Стало зрозуміло, що для глибшого розуміння економічних процесів варто використовувати в тій чи іншій мірі статистику та математику. Виникла необхідність появи нової науки зі своїм предметом і методом, що об'єднувала б всі дослідження в цьому напрямку. 29 грудня 1930 р. з ініціативи І. Фішера, Р. Фріша, Я. Тінбергена, Й. Шумпетера, О. Андерсона й інших учених було створено економетричне товариство, а у 1933 р. Р. Фріш заснував журнал «Економетрика», який і зараз має велике значення для розвитку економетрії. Вже в 1941 р. з'являється перший підручник з нової наукової дисципліни, написаний Я. Тінберґеном. У 1969 р. Фріш і Тінберґен стали першими дослідниками, які отримали Нобелівську премію з економіки. Як сказано в офіційному повідомленні нобелівського комітету: «за створення і застосування динамічних моделей до аналізу економічних процесів» [4].

Кожна економіко-математична модель реального явища характеризується об'єктом моделювання, системним описом об'єкта, цілями щодо побудови моделі, принципами моделювання, апаратом моделювання та способами ідентифікації й інтерпретації результатів.

Об'єктом моделювання може бути або реальна господарська система, або один чи кілька процесів, що розвиваються в такій системі. Для побудови моделі треба вказати назву об'єкта, дати його опис у вигляді системи, тобто виявити суттєві грані його взаємодії із зовнішнім середовищем.

Апарат моделювання визначається типом математичних конструкцій, що використовуються для побудови моделі: найпоширенішими є моделі, побудовані за допомогою апарату лінійної алгебри, регресійного аналізу, лінійних диференціальних рівнянь. Вибір того чи іншого апарату економіко-математичного моделювання значною мірою ґрунтується на гіпотезах, що покладені в основу побудови моделі.

Поняття функції - одне з основних математичних понять за допомогою яких моделюються взаємозв'язки між різними величинами, кількісні та якісні відносини між різними економічними характеристиками і показниками, а численні спостереження і дослідження показують, що величини в навколишньому світі (наприклад, ціна деякого товару і величина попиту на цей товар, прибуток фірми та обсяг виробництва цієї фірми, інфляція, безробіття і т.п.) існують не ізольовано одна від одної, а навпаки, вони зв'язані між собою певним чином.

Головною метою застосування функцій в економічних задачах є надання економічним моделям практичного застосування. Поняття функції в економіці вперше було застосовано при дослідженні попиту на товар. Найпростішою є лінійна функціональна залежність, наприклад, залежність між витратами K на випуск продукції та їх кількістю x :

$$K = ax, \text{ де } a - \text{ коефіцієнт пропорційності.}$$

Якщо ціну товару позначити через p , а попит на нього в натуральних одиницях – через Q , то, як відомо, зі збільшенням ціни товару попит на нього має спадати, що можна записати у формі $Q = f(p)$, де $f(p)$ – спадна функція. Залежність може бути такою:

$$Q = \frac{600}{11 + p^2}$$

Відношення між попитом і ціною товару можна розглядати з різних точок зору:

- як залежність попиту від ціни;
- як залежність ціни від попиту.

У другому випадку Q є незалежною змінною, а p – залежною, тобто $p = \varphi(Q)$ є оберненою до функції $Q = f(p)$.

Зауважимо, що залежності між ціною продукції та попитом на неї, а також між ціною і кількістю виробленої продукції – одне з основних питань економетрії.

За аналогією з функцією однієї змінної $y = f(x)$ можна розглянути функцію, яка залежатиме від кількох незалежних змінних $(x_1, \dots, x_n)$, тобто $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Велику увагу приділяють функції двох змінних (x_1, x_2) , або в традиційних позначеннях $u = f(x, y)$.

У економетричних моделях функції імпорту та експорту представляються у вигляді рівнянь регресії та пов'язують величини імпорту та експорту деякої країни з низкою чинників як внутрішнього, так і зовнішнього для даної країни, характеру, які вважаються змінними. Дані функції можна розглядати як виробничі функції багатьох змінних. Функція імпорту може бути представлена у вигляді:

$$I = f(Y, P_i, P_v, Z),$$

де I – величина імпорту; Y – змінна, яка відображає рівень економічної активності (наприклад, ВНП); P_i та P_v – відповідно, імпорتنі та внутрішні ціни товарної групи, яка розглядається; Z – інші фактори.

Дана функція найчастіше є логарифмічною, а її параметри являють собою коефіцієнти еластичності імпорту за різними факторами.

Функція експорту може бути представлена у вигляді:

$$E = f(Y_w, P_e, P_w)$$

де E – величина експорту; P_e – експортні ціни; P_w – середньозважений індекс внутрішніх цін імпортерів; Y_w – середньозважений рівень економічної активності в країнах-імпортерах (наприклад, показник зовнішнього попиту на продукцію даної країни).

Історично склалося так, що однією з перших функцій двох змінних, яка привернула увагу економістів, була степенева функція $Y = AK^\alpha L^\beta$, де Y – вартість виробленої продукції; K – вартість основного капіталу; L – вартість витрат праці; A, α, β – числові невід'ємні параметри, на які накладається додаткова умова $\alpha + \beta = 1$. Вона була названа функцією Кобба–Дугласа на честь американських учених математика Д.Коббі та економіста П.Дугласа, які вперше застосували її як виробничу функцію для економічного аналізу.

Завдяки математичним функціям можна визначати відношення інфляції до зміни курсу валют, зокрема, як:

$$e_t = e_0 \left(\frac{1 + i_{ht}}{1 + i_{ft}} \right)$$

де e – обмінний курс, виражений у кількості одиниць національної валюти на одну одиницю іноземної;

i – темп інфляції;

h – позначення своєї країни;

f – позначення іншої країни;

o – початок розрахункового періоду;

t – кінець розрахункового періоду.

Розглянемо особливий вид економіко-статистичних моделей – виробничі функції. Нехай Φ_n – множина всіх функцій від n змінних, визначених у деякій області M простору R^n . Підмножина $F \subset \Phi_n$ називається *параметричною* (точніше, k -параметричною), якщо існує підмножина $A_k \subset R^n$ і відображення $\rho: A_k \rightarrow \Phi_n$, тобто таке, що $\rho(A) = F$. У k -параметричному класі F кожна функція

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in F$$

цілком визначається вектором параметрів $a = (a_1, \dots, a_k)$ і може бути записана як $f_a(x)$. Зміст параметризації деякої множини функцій, по суті, є аналогічним введенню системи координат, за допомогою якої кожна функція з цієї множини ототожнюється з послідовністю своїх координат. Параметризацію допускають лише не дуже широкі множини F , зокрема, множина Φ_n не може бути k -параметричною за жодного скінченного k . Якщо відображення ρ є лінійним, тобто $\rho(a' + a'') = \rho(a') + \rho(a'')$, $a', a'' \in A_k$, то клас F утворюють *лінійні за параметром* функції. Припустимо, що всі функції $f \in F$ диференційовані до другого порядку включно, а множина A_k збігається з R^n .

Співвідношення $y = f_a(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f_a}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_i \partial x_j}$ розглядатимемо як систему з

$n+1 + \frac{n(n+1)}{2}$ рівнянь відносно k параметрів $a_1, \dots, a_k$. Кількість параметрів k , зазвичай, має той самий порядок, що й кількість змінних (n), тому здебільшого параметри $a_1, \dots,$

a_n можна виразити як функції від $x_1, \dots, x_n$, y , $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$, використовуючи k рівнянь з цієї

системи. Підставляючи отримані вирази у рівняння, що залишилися, можна отримати систему диференціальних рівнянь щодо функції $f(\cdot)$, яка вже не містить параметрів. Часто у такий спосіб вдається досягти того, щоб множина розв'язків отриманої системи рівнянь щодо функції $f(\cdot)$ збіглася б з F , тобто F був би загальним інтегралом системи. Власне, те, що функції з класу, який задовольняє цю систему диференціальних рівнянь з частковими похідними, і є тією властивістю, що об'єднує їх. Система диференціальних рівнянь (разом із частковими похідними за чинниками) є визначальною у формуванні таких систем. Використовуються також інші характеристичні функції – середня ефективність чинника, еластичність випуску за чинником, гранична норма заміщення чинника тощо, що поєднує між собою в загальному випадку значення функції, її аргументів і характеристик (в тій самій точці, що й значення функції). Інформація, що може бути отримана на стадії якісного економічного аналізу модельованого об'єкта, часто дозволяє прийняти чи відхилити припущення щодо існування такого зв'язку.

Для кожного з видів функцій можна вказати одну чи кілька систем умов для характеристики функцій даного виду, що однозначно виокремлюють цей вид з-поміж інших. Ці умови являють собою співвідношення між різними характеристиками функції

або опис поведінки окремих характеристик на різних частинах області її визначення.

У наведеному нижче списку функцій вони розташовуються в порядку зростання складності їх запису й, відповідно, збільшення кількості необхідних для цього параметрів.

Функція з фіксованими пропорціями чинників (функція Леонтьєва):

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right), \text{ де } a_1, a_2 - \text{параметри.}$$

Відомо кілька альтернативних систем (гіпотез), що виокремлюють функції цього виду:

а) гранична продуктивність першого чинника є дворівневою кусково-сталою незростаючою функцією від співвідношення $\frac{x_1}{x_2}$ з нульовим нижнім рівнем. Гранична продуктивність другого чинника - неспадна кусково-стала функція від $\frac{x_2}{x_1}$ з нульовим нижнім рівнем;

б) функція є розв'язком такої задачі математичного програмування:

$$y \rightarrow \max, \\ a_1 y \leq x_1, \\ a_2 y \leq x_2,$$

де y – змінна, яку оптимізують;

в) функція є однорідною, а еластичність заміни чинників дорівнює нулю;

г) функція може бути отримана з функції з постійною еластичністю виду

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1} \right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^{a_3} \right)^{\frac{1}{a_3}} \text{ шляхом граничного переходу: } a_3 \rightarrow -\infty.$$

Функція Леонтьєва призначена в основному для моделювання строго детермінованих технологій, які не допускають відхилення від технологічних норм і нормативів щодо використання ресурсів на одиницю продукції. Як правило, вона використовується для формалізованого опису дрібномасштабних або цілком автоматизованих об'єктів.

Лінійна функція

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Передумови та гіпотези:

а) граничні продуктивності чинників є постійною:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2, \text{ а в нулі функція набуває нульового значення;}$$

б) гранична продуктивність одного з чинників є постійною, і функція однорідна першого степеня:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1;$$

в) функція однорідна, й еластичність заміни чинників є нескінченною;

г) еластичність випуску за чинниками обернено пропорційна їхній середній продуктивності.

Лінійна функція застосовується для моделювання великомасштабних систем (велика галузь, народне господарство в цілому), у яких випуск продукції є результатом одночасного функціонування великої кількості різноманітних технологій. Особливу роль відіграє гіпотеза постійності граничних виробничих чинників чи їх необмеженого заміщення.

Функція Аллена:

$$y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2$$

визначається за такими умовами: швидкість зростання граничних продуктивностей є постійними, і функція є однорідною.

Функція Аллена за умови, що $a_1, a_2 > 0$ призначається для формалізованого опису виробничих процесів, у яких надмірне зростання будь-якого з чинників негативно впливає на обсяг випуску продукції. Зазвичай така функція використовується для формалізованого опису дрібномасштабних виробничих систем з обмеженими можливостями переробки ресурсів.

Функція постійної еластичності заміщення чинників (функція CES):

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{a_4}.$$

Передумови та гіпотези:

- функція є однорідною, й еластичність заміщення чинників є постійною.
- функція CES застосовується у разі відсутності точної інформації щодо рівня взаємозаміни виробничих чинників, і разом з тим є підстави вважати, що цей рівень суттєво не зміниться за зміни обсягів залучених ресурсів, тобто коли економічна технологія має властивість певної стійкості щодо певних пропорцій чинників. Функція CES (за наявності засобів оцінки її параметрів) може використовуватись для моделювання систем будь-якого рівня.

Функція Солоу:

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{a_5}$$

характеризується тим, що величина відсоткової зміни граничної норми заміщення чинників, що пов'язане зі зміною одного з чинників на один відсоток, не залежить від початкового рівня чинників.

Дана функція може використовуватись приблизно в тих самих ситуаціях, що й функція CES. Функція Солоу може використовуватись у моделюванні системи різних масштабів.

Багаторежимна функція:

$$y = (a_{11} x_1^{a_0} + a_{21} x_2^{a_0})^{a_1} \dots (a_{1k} x_1^{a_0} + a_{2k} x_2^{a_0})^{a_k}.$$

Функція є однорідною, еластичність функції за першим аргументом є згладженою k -рівневою спадною ступінчастою функцією. Багаторежимна функція – одна з найзагальніших. Вона використовується для формалізованого опису та моделювання процесів, у яких рівень віддачі кожної додаткової одиниці ресурсу стрибкоподібно змінюється залежно від співвідношення чинників. Функцію доцільно застосовувати за наявності апріорної інформації щодо кількості режимів k , а інколи й щодо величини «перехідної» області між режимами (чим більше $|a_0|$, тим чіткіше виокремлюються режими).

В економіко-математичному моделюванні широко використовують багатофакторні виробничі функції.

Один із найбільш раціональних способів переходу від двофакторних до багатофакторних функцій полягає в такому.

Розгляньмо двофакторну функцію:

$$y = \varphi_1(x_1, x_2). \quad (*)$$

Аргумент x_2 цієї функції розглянемо як узагальнений показник, що залежить також від двох інших чинників x_3, x_4 :

$$x_2 = \varphi_2(x_3, x_4),$$

де φ_2 – деяка функція. Підставляючи цей вираз у формулу (*), отримаємо трифакторну функцію $y = \varphi_1(x_1, \varphi_2(x_3, x_4))$, що виражає залежність показника y від аргументів x_1, x_3, x_4 . Цей процес можна продовжити, вважаючи, зокрема, що x_3 , у свою чергу, залежить від деяких чинників.

У загальному вигляді: якщо задано $(n-1)$ двофакторних функцій $\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_3, x_4), \dots, \varphi_{n-1}(x_{2n-3}, x_{2n-2})$, то у результаті послідовної підстановки дістанемо n -факторну функцію $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Операція такої підстановки (суперпозиції) має очевидний економічний сенс: другий аргумент, наприклад двофакторної функції, послідовно подається у вигляді залежності від показників нижчих рівнів. Неважко перевірити такі властивості операції суперпозиції:

- а) якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ - неспадні функції, то f - також неспадна функція;
- б) якщо $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ - лінійно-однорідні функції, а φ_1 - однорідна функція ступеня однорідності γ , то f - однорідна функція ступеня однорідності γ ;
- в) якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - увігнуті неспадні функції, то f - увігнута неспадна функція.

Отже, якщо двофакторні функції $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ є неокласичними, то отримана в результаті їх суперпозиції функція f також буде неокласичною.

Для виробничих функцій від n змінних справедливими є твердження, які показують, що клас функцій, поданих у вигляді суперпозиції будь-яких двофакторних функцій, є досить широким. Строго доводиться, зокрема, що будь-яка неперервна функція $f(x_1, \dots, x_n)$ від n змінних (за умови $n \geq 4$) може бути подана у вигляді суперпозиції неперервних функцій від трьох змінних. У свою чергу кожна неперервна функція від трьох змінних може бути отримана як суперпозиція функцій від двох змінних. Відомо також, що будь-яку неперервну функцію від двох змінних можна з будь-якою заданою точністю апроксимувати суперпозицією неперервних функцій від однієї змінної та функції $y = x_1 + x_2$.

Будь-яке дослідження завжди поєднує математичні моделі і статистичні дані. Економічні дані є кількісними характеристиками економічних об'єктів. Вони формуються під дією багатьох факторів, які не завжди можна проконтролювати ззовні. Розглянемо можливі моделі опису зв'язку між результативною змінною і чинниками, які впливають на неї.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + e$$

де y – досліджувана (залежна змінна); x_1, x_2, x_m , – незалежні, пояснюючі змінні; a_0, a_1, a_2, a_m – параметри моделі; e – випадкова складова моделі.

На основі статистичних даних можна знайти параметри цієї моделі, застосовуючи відомий метод найменших квадратів.

Якщо модель описується нелінійними функціями, то спочатку їх зводять до лінійних, оскільки лінійні функції мають багато переваг перед іншими. Розглянемо методи зведення деяких нелінійних функцій до лінійних.

Степенева функція:

$$y = a * x_1^{a_1} * x_2^{a_2} * \dots * x_m^{a_m}$$

після логарифмування набирає вигляду:

$$\ln y = \ln a + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \dots + a_m \ln x_m$$

і після заміни $\ln a = a_0$ є лінійною відносно параметрів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Показникова функція:

$$y = b_0 * b_1^{x_1} * b_2^{x_2} * \dots * b_m^{x_m}$$

після логарифмування набирає вигляду:

$$\ln y = \ln b_0 + x_1 \ln b_1 + x_2 \ln b_2 + \dots + x_m \ln b_m$$

і після заміни $\ln b_i = a_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ є лінійною відносно параметрів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Зокрема, функція Кобба-Дугласа після логарифмування набирає вигляду:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

і після заміни $\ln A = \gamma$ є лінійною відносно параметрів α, β, γ .

Гіперболічна функція:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_m}{x_m}$$

шляхом заміни змінних $z_i = \frac{1}{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$ зводиться до лінійного вигляду:

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m$$

Квадратична функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_m^2$$

шляхом заміни змінних $z_i = x_i^2$ зводиться до лінійного вигляду:

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m$$

Поліноміальна функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_m^m$$

шляхом заміни змінних $z_i = x_i^j$ зводиться до лінійного вигляду:

$$y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m$$

Методи економіко-математичного моделювання являють собою розділ прикладної сучасної науки, що динамічно розвивається. Досліджуючи цю проблему, ми переконалися, що функції досить часто використовуються в економічних дослідженнях і є одним із основних математичних понять, за допомогою яких моделюються взаємозв'язки між різними величинами.

Список використаних джерел

1. Ragnar Frisch's conception of econometrics by Olav Bjerkholt and Ariane Dupont. Session: History of econometrics // Paper for the Summer Meeting of the Econometric Society, Duke University, June 21-24, 2007
2. Бідник Н.Б. Використання математичних методів та моделей в економіці, фінансах / Н.Б. Бідник. – Львів: НЛТУ України. – 2008. – Вип.18.6. – 308 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
4. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В.Курышева, Т.В.Костеева и др. 2-е изд., перераб и доп., М: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.
5. Замков О.О. Математические методы в экономике: Учебник. 3-е издание, переработанное / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001. – 366 с.
6. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник / Н.И. Кондаков. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
7. Коноплицький В.А. Економічний словник / В.А. Коноплицький, Г.І. Філіна – К: КНТ, 2007. – 508 с.

Анотація. *Мащенко Г. Функції при дослідженні економічних процесів.*

У статті розглянуто застосування математичних методів при дослідженні економічних процесів, зокрема використання поняття функції.

Ключові слова: *математична модель, економіко – математична модель, функція.*

Abstract. Mashchenko G. Functions in the study of economic processes.

The article deals with the application of mathematical methods in the study of economic processes, including the use of the concept of function.

Keywords: *mathematical model, economic - mathematical model function.*

Марина Межирицька

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

maryna765@gmail.com

Науковий керівник – В.Д.Погребний

ЗАДАЧІ НА АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ, ЩО МІСТЯТЬ ПАРАМЕТР

Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей часто приводить до розв'язання рівняння, що містить параметр. Розв'язування задач з параметрами викликає великі труднощі в учнів, так як їх вивчення не є окремою складовою шкільного курсу математики, і вони розглядається в основному на факультативних заняттях, а їх розв'язування потребує не тільки знання властивостей функцій і рівнянь а й вміння виконувати алгебраїчні перетворення, вимагає від учнів високої логічної культури і доброї техніки дослідження.

Алгебраїчне рівняння – рівняння виду $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, де P – многочлен від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ці змінні називають також невідомими.

Алгебраїчні рівняння з параметрами можна класифікувати так:

- Лінійні рівняння
- Квадратні рівняння і рівняння які зводяться до них
- Рівняння вищих степенів
- Дробово-раціональні рівняння, які зводяться до лінійних
- Ірраціональні рівняння
- Системи рівнянь з параметрами

Рівняння виду

$$ax - b = 0$$

де a і b – вирази залежні тільки від параметрів, а x – невідома, називається лінійним відносно змінної x .

Воно зводиться до виду $ax = b$ і при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = \frac{b}{a}$ при будь-якій системі допустимих значень параметрів.

При $a = 0$ і $b = 0$, x - будь-яке число, а при $b \neq 0$ і $a = 0$ розв'язків немає.

Рівняння виду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де x – невідоме, a, b, c – вирази, залежні тільки від параметрів і $a \neq 0$, називається квадратним відносно x .

Допустимими будемо вважати тільки ті значення параметрів, при яких a, b, c – дійсні.

Рівняння з дробовими членами зводяться до лінійних рівнянь.

Іноколи рішення таких рівнянь зводиться до знаходження коренів квадратного рівняння [1]. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}.$$

При $a = 0$ воно не має змісту, значення x повинно задовольняти умови $x \neq -1$, $x \neq -2$. Помноживши обидві частини даного рівняння на $a(x+1)(x+2) \neq 0$, отримаємо рівняння $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3 = 0$, рівносильне даному. Звідси

$$x_1 = a+1, \quad x_2 = a-3.$$

Серед отриманих коренів можуть бути і сторонні, а саме ті, при яких $(x+2)(x+1)$ обертається в 0. Щоб виокремити їх, необхідно дізнатися, при яких значеннях a отримані корені (або один з них) приймають значення -2 або -1 .

$$x_1 = a+1 = -2 \text{ при } a = -3, \text{ при цьому } x_2 = a-3 = -6,$$

$$x_1 = a+1 = -1 \text{ при } a = -2, \text{ при цьому } x_2 = a-3 = -5,$$

$$x_2 = a-3 = -2 \text{ при } a = 1, \text{ при цьому } x_1 = a+1 = 2,$$

$$x_2 = a-3 = -1 \text{ при } a = 2, \text{ при цьому } x_1 = a+1 = 3.$$

Отже, при $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq \pm 2$, $a \neq 1$ $x_1 = a+1$, $x_2 = a-3$; при $a = -3$ $x = -6$; при $a = -2$ $x = -5$; при $a = 1$ $x = 2$; при $a = 2$ $x = 3$; при $a = 0$ рівняння немає змісту.

Воно зводиться до виду $ax = b$ і при $a \neq 0$ має єдиний розв'язок $x = \frac{b}{a}$ при будь-якій системі допустимих значень параметрів.

При $a = 0$ і $b = 0$, x - будь-яке число, а при $b \neq 0$ і $a = 0$ розв'язків немає.

Рівняння виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (n \in \mathbb{N}, a_0 \neq 0)$$

де x - невідома, $a_0, a_1, \dots, a_n$ - вирази, які залежні тільки від параметрів є алгебраїчним рівнянням степеня n . Якщо $n > 2$, то дане рівняння називається рівнянням вищого степеня.

Алгебраїчне рівняння степеня n має не більше ніж n дійсних коренів.

Тричленним називається рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, де $abc \neq 0, n > 1, n \in \mathbb{N}$. Щоб розв'язати таке рівняння, за допомогою підстановки $x^n = z$, спочатку одержуємо квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, а далі відповідно до того, скільки коренів має це квадратне рівняння.

При $n = 2$ тричленне рівняння має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$ і називається біквадратним рівнянням. За допомогою підстановки $x^2 = z, z \geq 0$, воно зводиться до квадратного.

Рівняння виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0 = 0$ при $a_0 \neq 0, a_0 \neq 1$ називається незведеним цілим раціональним рівнянням.

Рівняння виду $x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ називається зведеним цілим раціональним рівнянням.

При розв'язанні зведених цілих раціональних рівнянь використовують теореми про корені та ділення кутот многочленів:

1. Якщо $x = p$ - корінь многочлен $P_n(x)$, то $P_n(x)$ ділиться без остачі на $x - p$.

2. Нехай всі коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ - цілі числа, причому старший коефіцієнт дорівнює 1. Якщо такий многочлен має своїм коренем раціональне число, то це число - ціле.

3. Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то ці корені є дільниками вільного члена.

Процес розв'язання дробових рівнянь відбувається за звичайною схемою: дробове рівняння замінюється шляхом множення обох частин рівняння на спільний

знаменник лівої і правої його частин. Після чого учні розв'язують відомим їм способом ціле рівняння, виключаючи сторонні корені, тобто числа, які обертають спільний знаменник в нуль. У разі рівнянь з параметрами ця задача більш складна. Тут, щоб виключити сторонні корені, потрібно знаходити значення параметра, що обертає спільний знаменник в нуль, тобто розв'язувати відповідні рівняння щодо параметра [3].

Рівняння у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називають ірраціональними. Для розв'язування задане ірраціональне рівняння найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.

Якщо до запису ірраціонального рівняння, крім змінної та числових коефіцієнтів, входять також буквені коефіцієнти – параметри, то при розв'язуванні таких рівнянь можна користуватися наступним орієнтиром. А саме: будь-яке рівняння з параметрами можна розв'язати як звичайне рівняння до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язання, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно [2].

Головними особливостями при рішенні рівнянь такого типу є:

1. Обмеження області визначення невідомої x , тому що вона змінюється залежно від значення параметра.

2. У розв'язанні рівнянь виду $\sqrt{f(x,a)} = g(x,a)$ при піднесенні у квадрат необхідно враховувати знак $g(x,a)$ і робити перевірку коренів.

При розгляді всіх особливих випадків і піднесенні обох частин ірраціонального рівняння у квадрат ми переходимо до розв'язання квадратного рівняння з параметром.

У підручнику Неліна Є.П. [2], подано такі два основних методи розв'язування нерівностей, що містять параметр:

- 1) за допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня;
- 2) а допомогою заміни змінних.

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюються перевіркою.

Якщо для розв'язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок – коли всі корені першого рівняння будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, що не задовольняють заданому рівнянню. Такі корені називають сторонніми для заданого рівняння. Щоб з'ясувати, чи є одержані числа коренями заданого рівняння, виконують перевірку одержаних розв'язків.

Розглянемо кілька способів розв'язування таких рівнянь.

$$1) \sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо

$$\begin{aligned} x^2 + ax - 2a &= x^2 + 2x + 1 \\ (a - 2)x &= 2a + 1 \end{aligned}$$

При $a = 2$ рівняння розв'язків немає.

$$\text{При } a \neq 2 \quad x = \frac{2a + 1}{a - 2}.$$

Для перевірки розв'язку підставимо знайдене x в початкове рівняння.

Ліва частина

$$\sqrt{\frac{(2a+1)^2}{(a-2)^2} + \frac{a(2a+1)}{a-2}} - 2a = \sqrt{\frac{(3a-1)^2}{(a-2)^2}} = \left| \frac{3a-1}{a-2} \right|.$$

При $a \leq \frac{1}{3}$ і при $a > 2$ $\left| \frac{3a-1}{a-2} \right| = \frac{3a-1}{a-2};$

при $\frac{1}{3} < a < 2$ $\left| \frac{3a-1}{a-2} \right| = \frac{1-3a}{a-2}.$

Права частина

$$\frac{2a+1}{a-2} + 1 = \frac{3a-1}{a-2}$$

Звідси видно, що $x = \frac{2a+1}{a-2}$ є коренем рівняння при $a \leq \frac{1}{3}$ і при $a > 2$.

При $\frac{1}{3} < a < 2$ розв'язків немає.

2) Розглянемо тепер другий спосіб розв'язування цього рівняння. Його корінь повинен задовольняти такі умови

$$x^2 + ax - 2a \geq 0 \text{ і } x+1 \geq 0.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо

$$x^2 + ax - 2a = (x+1)^2$$

будь-який корінь задовольняє умову $x^2 + ax - 2a \geq 0$, так як $(x+1)^2 \geq 0$.

Звідси слідує, що рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 + ax - 2a = (x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

При $a = 2$ вона розв'язків не буде мати, при $a \neq 2$ отримаємо

$$\begin{cases} x = \frac{2a+1}{a-2} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Тепер необхідно знайти ті значення a , при яких $\frac{2a+1}{a-2} \geq -1$.

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} a > 2 \\ 2a+1 \geq -a+2 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 2 \\ 2a+1 \leq -a+2 \end{cases} \end{cases}$$

Отже, $\frac{1}{3} < a < 2$.

Як бачимо, відповідь отримали однакову.

Алгебраїчні рівняння з n змінними, для яких треба знайти розв'язки, що задовольняють одночасно всім рівнянням, називають системою n алгебраїчних рівнянь з n змінними.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Системи рівнянь, які не мають розв'язків, називаються несумісними.

При розв'язанні систем рівнянь з параметрами використовують всі відомі способи розв'язання систем рівнянь: підстановка, додавання, графічний спосіб.

Список використаних джерел

1. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С.Якир. – К.: РИА „Текст”; МП „ОКО”, 1992. – 290 с.
2. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підр. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Є. П. Нелін. – 4- те вид., випр. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2008. – 448 с.
3. Ястребницкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры. Пособие для учителей / Г. А. Ястребницкий. – М.: „Просвещение”, 1972. – 128 с.

Анотація. Межирицька М. Задачі на алгебраїчні рівняння що містять параметр.

У статті висвітлено класифікацію алгебраїчних рівнянь. Розглянуто означення лінійних, квадратних, рівнянь вищих степенів, дробово-раціональних, ірраціональних рівнянь та систем алгебраїчних рівнянь що містять параметри. Розглянуті головні особливості при вирішенні алгебраїчних рівнянь що містять параметри.

Ключові слова: лінійні, квадратні, рівняння вищих степенів, дробово-раціональні, ірраціональні рівняння та системи рівнянь що містять параметри.

Abstract. Mezhyrytska M. Challenges for the algebraic equations containing a parameter.

The article deals with the classification of algebraic equations. Definition considered linear, square, equations of higher degrees, fractional rational, irrational algebraic equations and systems of equations containing parameters. Considered the main features in solving algebraic equations containing parameters.

Keywords: linear, square, equations of higher degrees, fractional rational, irrational equations and systems of equations containing parameters.

Оксана Москальова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

ksenqkazaraza@mail.ru

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ З ОСОБЛИВИМИ ОСВІТНІМИ ПОТРЕБАМИ

Психолого-педагогічні дослідження свідчать, що для розумово відсталих учнів характерні певні порушення як чуттєвих, так і раціональних форм пізнання, а також наявність недостатньої кількості зв'язків між ними. Це призводить до труднощів при переході від чуттєвих форм сприйняття до узагальненого абстрактного мислення, а також у випадку необхідності конкретизувати узагальнені абстрактні поняття [4].

Проаналізувавши літературу з даної проблеми, ми можемо зазначити, що спеціалісти рекомендують для використання на уроках математики такі методи: залежно від форми організації спільної діяльності вчителя й учнів – розповідь, бесіда, самостійна робота; від джерела знань – словесні методи (розповідь або виклад знань, бесіда, робота з підручниками або іншими друкованими матеріалами), наочні методи (спостереження, демонстрація предметів або їхніх зображень), практична робота (вимірювання, креслення геометричних фігур, ліплення, аплікація, моделювання,

знаходження значень числових виразів тощо); **від способу організації навчальної діяльності школярів** (репродуктивна, продуктивна діяльність) – пояснювально-ілюстративний, при якому вчитель дає готову інформацію, а учні її сприймають, усвідомлюють і запам'ятовують; репродуктивний, при якому дається зразок виконання завдання, а потім вимагає від учнів відтворення знань, дій відповідно до даного зразка; частково-пошуковий, при якому учні беруть участь у пошуку шляхів вирішення поставленого завдання, а педагог розчленовує його на складові частини, певною мірою показує шлях вирішення та частково вимагає від них самостійної роботи; елементи проблемного викладу матеріалу, при якому ставиться певна проблема і школярі, намагаючись її розв'язати, переконуються в недостатності наявних у них знань. Вона для них є частково нерозв'язною. Тоді педагог показує пропонує разом розв'язати завдання по іншому [3].

Навчання математики дітей з вадами розвитку має свою специфіку, тому ми найчастіше спостерігаємо не використання методів у чистому вигляді, а їх поєднання. Саме комплексне використання методів дозволяє більш повно вирішувати завдання уроку: кожен метод, який застосовується вчителем при навчанні дітей, повинен спрямовуватись на корекцію або компенсацію тих чи інших порушень психічного розвитку дитини.

На навчання математики розумово відсталих дітей впливають наступні чинники: різноманітність самого навчального матеріалу та його складність, неоднорідність складу учнів класу, наявність у них як відхилень пізнавальної, так і емоційно-вольової сфери, відсутність цікавості до навчання, труднощі запам'ятовування. Все це вимагає від учителя вміння використовувати різні методи, комплектувати, застосовувати їх в одних випадках як провідні, в інших – у формі другорядних прийомів, оскільки жоден з них не є універсальним. Ефективність методів залежить від правильного, оптимального їх поєднання в навчальному процесі. На уроках математики необхідно добиватись оптимального поєднання слова, наочності та практичності самостійної діяльності школярів [4].

Методи навчання, джерелом навчальної інформації яких виступає слово в усній або письмовій формах, називаються словесними. Вони, в основному, використовуються при повідомленні нових знань, але можуть застосовуватись і на інших етапах: під час закріплення, узагальнення, корекції знань тощо.

До словесних методів відносяться розповідь, бесіда, пояснення. В них головна роль належить живому слову вчителя. Для учнів зі стійкими інтелектуальними вадами слово вчителя виступає зразком, тому виклад матеріалу має бути чітким, логічним, виразним, емоційно насиченим, темп мовлення – помірним. Повільне, монотонне мовлення вчителя викликає в школярів роздратування, при прискореному мовленні вони губляться у словесному потоці, не сприймають матеріал, не пов'язують його з попереднім.

Однією з форм словесного подання матеріалу є розповідь, тобто образний виклад матеріалу, спрямований на повідомлення або опис конкретних фактів. Враховуючи підвищену виснаженість, стомлюваність учнів розповідь у молодших класах допоміжної школи має тривати 7-10 хвилин, а в старших – 15-20 хвилин. При цьому матеріал обов'язково поєднується з наочною, самостійною роботою, вправами та іншими видами практичної діяльності школярів. Але цей метод вимагає максимальної активної роботи у вчителя. Учні виступають пасивними учасниками, від яких вимагається лише споглядати за вчителем і слухати його, тому до використання словесних методів потрібно підходити обережно, враховуючи можливості дітей [2].

Крім розповіді на уроках математики використовують такий метод навчання, як бесіда, під час використання якого вчитель, опираючись на наявні у школярів знання, навички і досвід, з допомогою запитань підводить їх до розуміння і засвоєння нових знань, до повторення і перевірки навчального матеріалу. Це питально-відповідний метод навчання. Частіше за все його використовують під час знайомства з новим типом арифметичних задач, способами їхнього розв'язання, підготовки дітей до сприйняття матеріалу.

У процесі роботи на уроці необхідно уникати запитань, які вимагають від учнів складних відповідей, оперування абстрактними запитаннями. Не можна ставити перед розумово відсталими дітьми невизначені запитання ("Якою дією вирішуються приклади?"), які носять подвійний зміст ("До яких фігур відноситься трикутник?"), які б включали однозначну відповідь ("Це розв'язок задачі?") [1].

Основною умовою застосування бесіди під час закріплення та перевірки знань є наявність у розумово відсталих певної обізнаності з тією чи іншою темою. Це дає можливість вчителю через систему цілеспрямованих запитань, опираючись на знання школярів, підвести їх до розуміння і усвідомлення нового матеріалу.

Також на уроках математики використовують пояснення, тобто виклад матеріалу, метою якого є розкриття нових понять, математичних термінів, обчислювальних прийомів тощо. Не можна плутати пояснення і розповідь. Метод пояснення застосовується до невеликих, логічно завершених частин, його використання не повинно бути тривалим. У молодших класах на нього рекомендують відводити до 5 хвилин, а в старших – до 10 хвилин [2].

Методи усного викладу матеріалу поєднуються вчителем з засобами наочності, посилюючи тим самим їх пізнавально-корекційний вплив. До **наочних методів** навчання належить демонстрація, яка може виступати одночасно і як ілюстрація, і як джерело знань; демонструватись можуть як реальні об'єкти, так і їхні зображення, процеси, явища.

Демонстрація – це процес показу предметів і явищ навколишньої дійсності за допомогою технічних засобів, а **ілюстрація** – це показ школярам натуральних предметів та їхніх зображень.

Усний виклад математичного матеріалу у поєднанні з демонстрацією та ілюстрацією наочних посібників називається **ілюстративно-демонстративним** методом. Ефективність цих методів залежить від вмілого поєднання слова і наочності, уміння виділяти в предметі суттєві ознаки. Демонстрація наочності буває декількох видів: натуральна, умовно-об'ємна, ілюстративно-зображувальна та наочно-словесна.

У сучасних умовах на уроках математики доцільно впроваджувати й екранні засоби навчання. Це значно розширює можливості дітей у засвоєнні ними навчального матеріалу. Також на даний час досить широко використовуються комп'ютерні технології, які допомагають краще засвоювати матеріал. Демонстрація на уроках математики наочних посібників у молодших класах не повинна перевищувати 10-15 хвилин, а в старших – 20-25 хвилин [2].

Однією з активних форм чуттєвого сприйняття є **спостереження**. Цей метод широко використовується на уроках математики з метою підготовки учнів до узагальнень та висновків. Об'єктами спостережень виступають арифметичні задачі, числові вирази, предметні множини, числа, геометричні фігури тощо.

Розумово відсталі учні самостійно не можуть помітити суттєвих деталей у предметах, явищах, які вони оглядають, не здатні провести їх розгорнутий аналіз. Метод спостереження покликаний так організовувати діяльність дітей, щоб вони

змогли самостійно зробити відповідні висновки, усвідомити алгоритм розв'язання тієї чи іншої математичної проблеми.

У процесі навчання математики великого значення набуває не тільки засвоєння учнями системи математичних знань, умінь та навичок, але й їхнє застосування під час практичної діяльності.

Практичне виконання завдань має цілком конкретну корекційну мету – компенсувати порушення інтелектуальної та емоційно-вольової сфери шляхом залучення розумово відсталих дітей до безпосередньої діяльності. Цей вид роботи вимагає ретельного керівництва, значної уваги вчителя, що допоможе попередити появу неправильних навичок або можливих помилок.

Формування навичок відбувається під час виконання вправ. На уроках математики з розумово відсталими дітьми можна використовувати такі види вправ: а) усні (розв'язування задач з яскравим сюжетом та не складними у розв'язанні, усний рахунок та рахунок за допомогою паличок або інших предметів, обчислення прикладів); б) письмові (невеликі самостійні та контрольні роботи не складного змісту); в) практичні (проведення вимірювальних робіт фігур або частин рисунку, виготовлення простих приладів, моделей, виробів) [3].

Сформувавши в школярів певні уміння та навички, необхідно переходити до розвитку вміння поєднувати свою діяльність з мовленням – перш ніж виконати дію, вони повинні її проговорити. Це дуже важливий етап розвитку і корекції пізнавальних процесів розумово відсталих дітей, адже формування вміння використовувати усні знаки, якими виступають слова, є необхідною умовою для проведення обчислень.

Застосування методу вправ дає можливість організувати індивідуальний підхід до учнів, що сприяє формуванню у них впевненості у своїх силах; вправи на закріплення умінь і навичок повинні бути спрямовані на розвиток їхньої самостійності, корекцію психофізичних відхилень.

Одноманітність завдань і способів організації роботи знижує активне ставлення учнів до навчання, посилює тенденцію до механічної, недостатньо усвідомленої діяльності, тому необхідно давати їм виконувати завдання як репродуктивного характеру, так і завдання на актуалізацію пізнавально-пошукової діяльності [3].

Природно, що специфіка навчання розумово відсталих дітей передбачає використання на самостійних роботах більшої кількості завдань репродуктивного типу, при виконанні яких від учнів вимагається пряме відтворення отриманих на уроках знань і використання їх в умовах, повністю аналогічних тим, які виконувались у класі.

Також при навчанні математики розумово відсталих дітей можна тоді використовувати деякі елементи проблемного методу викладу матеріалу. Це, наприклад, робота з індивідуальними картками, що містять завдання, адаптовані до знань та можливостей таких учнів. Але також потрібно враховувати і те, що такий вид роботи не може тривати довго і вчитель має корегувати діяльність школярів та постійно скореговувати його роботу.

Також одним з найефективніших способів розвитку розумово відсталих дітей на уроках математики є використання дидактичних ігор та інших цікавих видів діяльності (змагань, математичних свят, вікторин). Наприклад, з великим зацікавленням такі діти рахують “ланцюжком”, розв'язують приклади “магічне поле”, відгадують кросворди тощо [4].

Потребу в грі у розумово відсталих дітей необхідно використовувати і спрямовувати з метою вирішення певних навчальних і виховних задач. Відомо, якщо дитина зацікавлена роботою, позитивно емоційно налаштована, то ефективність

заняття помітно зростає. Формування будь-яких навичок і вмінь у розумово відсталих учнів вимагає не лише великих зусиль, тривалого часу, але й однотипних вправ. Дидактичні ігри дозволяють одноманітний матеріал зробити цікавим для учнів, надати йому привабливої форми. Позитивні емоції, які виникають під час гри, активізують діяльність дитини, розвивають її довільну увагу, пам'ять. В грі дитина непомітно для себе виконує велику кількість арифметичних дій, тренується в лічбі, розв'язує задачі, збагачує свої просторові, кількісні й часові уявлення; виконує аналіз і порівняння чисел, геометричних фігур. Дидактичні ігри, створені спеціально з навчальною метою, сприяють і загальному розвитку дитини, розширенню її світогляду, збагаченню словника, розвитку мовлення, вчать використовувати математичні знання у змінених умовах, в новій ситуації. Все це свідчить про велике корекційне значення дидактичних ігор.

На уроках математики дидактичні ігри знаходять широке застосування при вивченні будь-якої теми. Створено велику кількість ігор, розвиваючих кількісні, просторові, часові уявлення і уявлення про розміри предметів. Це добре відомі ігри: "Весела лічба", "Живі цифри", "Арифметичне лото" (доміно), "Драбинка" та ін. Проведення таких ігор дозволяє вчителю концентрувати та утримувати увагу розумово відсталіх дітей при вивченні математики, що є досить важливим [4].

Лише за умови здійснення цілеспрямованого, систематизованого підходу до навчання дітей з вадами розвитку розв'язуванню завдань можна домогтися набуття ними математичних знань, умінь і навичок та навіть розвитку їх мислення та пізнавальної діяльності у цілому.

Список використаних джерел

1. Василевська У. Я. Розуміння навчального матеріалу учнями допоміжних шкіл. – М., 1960.
2. Забрамная З. Д. Психолого-педагогическая диагностика розумового розвитку дітей. – М.: Просвітництво, 1995.
3. Прахина М.П. Практическая направленность преподавания математики во вспомогательной школе // Дефектология. – 1991. – №5. – С. 34-37.
4. Перова М.Н. Методика преподавания математике в специальной (коррекционной) школе VIII вида. – М.: Владос, 1999.

Анотація. Москальова О. Специфіка навчання математики учнів з особливими потребами.

У статті розглянуто методи, що використовуються в процесі навчання математики дітей з особливими освітніми потребами та розкривається ефективність даних методів на уроках математик.

Ключові слова: розумово відсталі діти, методи.

Abstract. Moskaleva O. The specifics of teaching mathematics students with special needs.

The text of the last one deals with the methods used in teaching mathematics to children with special educational needs and how these methods are effective in the classroom.

Keywords: mentally retarded children, methods.

Наталія Півень

*Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка**natalya.zolyshka@yandex.ua**Науковий керівник – С.В. Петренко*

ФОРМУВАННЯ ПІЗНАВАЛЬНОГО ІНТЕРЕСУ В УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми. Пізнавальний інтерес як важливе особистісне утворення та характеристика навчального процесу завжди у центрі уваги педагогів. Сьогодні він розглядається як рушійна сила активізації навчання, розвитку пізнавальної самостійності учнів, важливий напрям підвищення ефективності навчальної діяльності. Разом з тим вивчення літературних джерел свідчить, що останніми роками в умовах перехідного суспільства та реформування системи шкільної освіти, даному питанню приділяється мало уваги, а інтерес учнів до навчання в цілому, зокрема, до математики суттєво знизився. Ці явища зумовлені як загальними соціальними чинниками, так і особливостями сучасного стану системи освіти в Україні. За таких обставин підвищується актуальність дослідження розвитку пізнавального інтересу з урахуванням потреб сьогодення.

Поняття «інтерес» складне і багатогранне, а тому має багато різних трактувань у психологічній і педагогічній літературі. Можна виокремити чотири різні підходи до його трактувань:

1) форма прояву вибіркового ставлення особистості до об'єкта, що визначається його життєвою важливістю і емоційною привабливістю. Цей підхід показує, що інтерес має вибіркового характеру, виражається спрямуванням уваги на об'єкт певного роду, на його пізнання;

2) з позиції емоцій він визначається як позитивна емоція, яка переживається людиною частіше, ніж інші емоції. Тісний зв'язок між емоцією інтересу і функціями мислення, пам'яті, сприймання підкреслює важливість розвитку пізнавального інтересу у школярів до вивчення предметів, зокрема математики. Учень не в змозі вивчати предмет, якщо він не викликає в нього інтересу;

3) це глибинний внутрішній мотив, який утворюється на властивій людині вродженій пізнавальній потребі. Наявність пізнавального інтересу у школярів є індикатором того, що їх діяльність вмотивована, а, отже, навчальний процес організований і протікає методично правильно;

4) це свідоме напруження людини на задоволення важливої для неї потреби [3].

Макаренко А.С. вважав, що життя і праця дитини повинні бути пронизані інтересом. У діалектиці виховного процесу А.С. Макаренко показав єдність змісту, засобів і методів виховання, розвив логіку виховного процесу, виходячи з поєднання вимог суспільного життя з інтересами дитячого колективу, окремої дитини.

Найважливіше завдання школи в плані вивчення математики — сприяти засвоєнню учнями глибоких і міцних знань, формуванню вмінь і навичок застосовувати їх у житті, на практиці.

Мета статті полягає у з'ясуванні сутності поняття «пізнавальний інтерес» та виділенні компонентів, що впливають на успішне засвоєння матеріалу при навчанні математики.

Виклад основного матеріалу. Школа покликана навчити кожного випускника знаходити шляхи розв'язання проблем, формувати в школярів здатність самостійно,

творчо мислити. Важливим завданням, яке стоїть перед вчителем – розвинути в учнів пізнавальний інтерес, домогтися того, щоб на уроках математики не було байдужих спостерігачів, а лише активні учасники навчального процесу. Досягти успіху можливо лише за умови усвідомлення того, що рушійною силою в навчальній діяльності учня є навчально-пізнавальний інтерес. Відомо, що пізнавальний інтерес є формою прояву пізнавальної потреби, яка забезпечує спрямованість особистості на усвідомлення цілей діяльності, сприяючи глибокому і свідомому засвоєнню знань, формуванню вмінь і навичок і, як результат, успішному навчанню.

Пізнавальний інтерес є стимулятором діяльності, що впливає на свідомість, відношення учнів до навчання, навчально-виховного процесу. Роль пізнавального інтересу в навчальній діяльності в тому, що він і в навчанні є носієм зовнішніх і внутрішніх ресурсів об'єктивних і суб'єктивних чинників ефективної спільної діяльності вчителя і учнів.

Створення сприятливої атмосфери пізнавальної діяльності учнів-найважливіша умова формування пізнавального інтересу і розвитку особи учня в навчальному процесі. Ця умова зв'язує весь комплекс функцій навчання – освітньої, розвиваючої, яка виховує і має безпосередній і опосередкований вплив на інтерес.

Проблема формування пізнавальних інтересів учнів в процесі навчання – одна з центральних. Вирішення її пов'язане з двома головними питаннями:

по-перше, сприяти найбільш повноцінного відображення у свідомості учнів явищ науки, проникненню в їх істотні взаємозв'язки;

по-друге, підтримувати і підкріплювати таке ставлення до знань, до навчання в школі, яке наповнене готовністю оволодіти знаннями, заглиблюватися все більше і більше в процесі пізнання [3].

Пізнавальний інтерес досліджували С. О. Кашин, Н. Г. Морозова, Г. І. Щукіна та ін. Зокрема, Н. Г. Морозова під пізнавальним інтересом розуміє емоційно пізнавальне ставлення школярів до навчального предмета і виділяє три рівні вияву інтересу, які вважає етапами його становлення:

- 1) епізодичне переживання як безпосередньо мотивоване, емоційно-пізнавальне ставлення до предмета чи діяльності;
- 2) стійкий пізнавальний інтерес, коли переживання узагальнюється і стає емоційно-пізнавальним стосовно предмета або діяльності;
- 3) інтерес-ставлення як стійкий особистісний інтерес, що стає спрямованістю особистості [1].

Інтерактивні технології навчання на уроках математики сприяють:

- ефективному розвитку в кожній особі математичних здібностей, розвитку логічного мислення, системи загальнолюдських цінностей та загальноприйнятих норм поведінки;
- розвитку здатності цінувати знання та вміння користуватися ними;
- усвідомленню особистої відповідальності та вмінню об'єднуватися з іншими членами колективу класу задля розв'язання спільної проблеми, розвитку здатності визнавати і поважати цінності іншої людини;
- формуванню навичок спілкування та співпраці з іншими членами групи;
- взаєморозумінню та взаємоповазі до кожного індивідуума;
- вихованню толерантності, співчуття, доброзичливості та піклування, почуття солідарності й рівності;
- формуванню вміння робити вільний та незалежний вибір, що ґрунтується на власних судженнях та аналізі дійсності, розумінні норм і порад поведінки [2].

Інтерактивне навчання — це спеціальна форма організації пізнавальної діяльності, яка має конкретну, передбачувану мету — створити комфортні умови навчання, за яких кожен учень відчуває свою успішність, інтелектуальну спроможність [2].

В умовах інтерактивного навчання на уроках математики забезпечуються формування в учнів передусім таких інтелектуальних умінь, як аналіз, порівняння, виділення головного, а також критичне мислення та здатність приймати відповідальні рішення.

Інтерактивні вправи на уроках математики зорієнтовані на:

- 1) розвиток належності мислення школярів, певної самостійності думок: спонукають учнів до висловлення своєї думки, стимулюють вироблення творчого ставлення до будь-яких висновків, правил тощо;
- 2) вироблення критичного ставлення до себе, уміння бачити свої помилки та адекватно ставитися до них;
- 3) розвиток пошукової спрямованості мислення, прагненню до знаходження кращих варіантів вирішення навчальних завдань: передбачають вправи, які ставлять дітей у реальну ситуацію пошуку [2].

Суть інтерактивного навчання на уроках математики полягає ще й в тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної, активної взаємодії всіх учнів колективу. Це співнавчання, взаємонавчання (колективне, групе, навчання у співпраці), де учень і вчитель є рівноправними, рівнозначними суб'єктами навчання, розуміють, що вони роблять рефлексують з приводу тощо, вони знають, вміють і здійснюють [2].

Організація інтерактивного навчання передбачає використання дидактичних і рольових ігор, моделювання життєвих ситуацій, створення проблемної ситуації. Вирішення певних проблем відбувається переважно в груповій формі. Така форма роботи допомагає вчителю якомога більше стимулювати пізнавальну діяльність учнів, а отже заохочувати їх до навчання й формувати стійких пізнавальних інтерес.

Дидактичні ігри на уроках математики мають важливе значення, оскільки в учнів 5 класу пізнавальний інтерес нестійкий і такий, що безпосередньо обирається навколо вузько конкретного змісту їхнього життя.

На уроках математики, як і на уроках інших дисциплін, зручно використовувати ігровий матеріал. Це дасть можливість поглибити знання, зацікавить предметом.

Система вправ, які сприяють підвищенню пізнавального інтересу в учнів 5 класу під час вивчення теми « Натуральні числа і дії над ними » :

1. Гра „Математичне лото”

Грають дві команди. По черзі з кожної команди учасник виходить до дошки і закреслює відповідну цифру лото.

І в.

5	9	10001	1001
7	3	0	4
1	6	9999	14

1. Скільки тварин хотіли з'їсти колобка?
2. Яке з чисел натурального ряду є найменшим?
3. Яке одноцифрове число найбільше?
4. Яке число йде за числом 1000?
5. Яке число передує числу 10000?

6. Скільки всього людей і тварин разом було задіяно при витягування ріпки із Землі?

// в.

1000000	63	32	0
12	9	11	10
70	10000	7	33

1. Яке однозначне натуральне число найменше?
2. Скільки гномів рятувало Білосніжку?
3. Якщо $x = 99999$, то $x + 1$ чому дорівнює?
4. Скільки букв в українському алфавіті?
5. Скільки років минуло з того часу, як закінчилася Велика Вітчизняна війна?
6. Скільки навчальних предметів ти вивчаєш у 5 класі?

2. Гра «Бліцтурнір»

Для гри необхідно лист паперу А4, маркер або фломастер. Завдання для гри заздалегідь написані на дошці. Показуючи запитання, відповіді на них учні пишуть на листку. Перевірка правильності кожної відповіді здійснюється одразу.

Запитання до гри

1. *Запишіть число:*

$$6000\ 000\ 000 + 4000\ 000 + 1000 + 8;$$

$$7000\ 000 + 200000 + 3000 + 500;$$

$$2\ 000 + 900 + 50 + 8.$$

2. *Обчисліть:*

$$4 + 3 + 6 + 7;$$

$$1 + 5 + 9 + 6;$$

$$60 + 50 + 40 + 50;$$

$$80 + 70 + 20 + 30.$$

3. *Запишіть число, яке:*

- а) на 1 менше від найменшого трицифрового числа;
- б) на 4 більше за найбільше трицифрове число;
- в) на 5 менше найменшого п'ятицифрового числа;
- г) на 7 більше за найменше восьмицифрове число.

4. *Запишіть число, в якому:*

- а) 4 десятки і 2 одиниці;
- б) 5 сотень і 1 одиниця;
- в) 34 мільйони 384 тисячі 5 одиниць.

Висновки. Таким чином формуванню стійкого пізнавального інтересу в учнів 5 класу сприяють вдало підібрані ігри, чи їх елементи, що дає можливість поглибити знання та зацікавити предметом.

Нагальною і важливою є проблема розробки концепції формування готовності вчителя до впровадження в своїй педагогічній діяльності інтерактивного навчання на уроках математики.

Список використаних джерел

1. Ігнатов Р. Розвиток пізнавальної активності учнів як педагогічна проблема / Р. Ігнатов // Педагогічний вісник. – 2004. – № 18. – С. 73-80.
2. Побірченко Н. Інтерективне навчання в системі освітніх технологій / Н. Побірченко, Г. Коберник // Початкова школа – 2004. – № 10. – С.8-10.

3. Щукіна Г.І. Педагогічні проблеми формування пізнавального інтересу учнів. – М. Освіта, 1995.

Анотація. Півень Н. Формування пізнавального інтересу при вивченні математики в учнів основної школи.

У статті розкрито зміст понять «пізнавальний інтерес», «інтерактивні технології», «інтерактивне навчання». Запропоновано систему вправ, які сприяють розвитку пізнавального інтересу під час вивчення теми «Натуральні числа і дії над ними».

Ключові слова: пізнавальний інтерес, інтерактивні технології, інтерактивне навчання.

Abstract. Piven N. Formation of cognitive interest in the study of mathematics at secondary school pupils.

In the article the meaning of "cognitive interest", "interactive technology", "online learning". Suggested system of exercises that promote cognitive interest lesson on "Natural numbers and operations on them."

Keywords: cognitive interest, interactive technologies, interactive learning.

Анастасія Прасок

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

krassotka20_01@bk.ru

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Відомо, що ряди є основним математичним апаратом дослідження функцій та їх властивостей у математичному аналізі. У дійсному аналізі деякі задачі викликають труднощі, проте в комплексній області обмеження можуть зніматися і ці ж задачі мають досить просте розв'язання.

Якщо розглядати відому функцію $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, що є неперервною і нескінченно диференційованою на всій дійсній прямій, то її можна подати як суму степеневих рядів, тобто розкласти у ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Очевидно, що даний ряд збігається лише на інтервалі $(-1;1)$, хоча точки ± 1 не є особливими для $f(x)$. При переході до функції комплексної змінної матимемо функцію $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ з двома особливими точками $\pm i$, її можна розкласти в ряд Тейлора тільки в крузі $|z| < 1$ [2].

Комплексні функціональні ряди відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: з одного боку функціональні ряди є самостійним розділом математики, а з іншого – вони є потужним апаратом у дослідженні різних проблем, зокрема, розв'язанні диференціальних рівнянь, теорії лишків, доведенні основної теореми алгебри, теореми Руше і т. д.

Теорія комплексних функціональних рядів має широке застосування не лише в

математиці, а й у інженерії, медицині, комп'ютерній графіці тощо. Наприклад, якщо розглядати перетворення Фур'є може описувати сигнал як залежність частоти і амплітуди від часу й надавати інформацію про фазу, що є важливим для інженерно-технічних працівників на бурових установках. Ряд Фур'є використовують у комп'ютерній графіці для автоматизації та контролю за технологічними процесами в нафтогазовій промисловості. Якщо розглядати ряд Лорана, то він застосовується при дослідженні проблем гідродинаміки – в розрахунках циркуляції при обтіканні круглого циліндра потоком рідини [2].

Розглянемо детальніше застосування рядів Фур'є в комп'ютерній графіці. Їх широко застосовують при стисненні зображень у форматі зберігання JPEG, при «зніманні» шумів у неякісних комп'ютерних фільмах, при визначенні несправностей медичних чи інших приладів, що використовують такі сигнали, тощо. Перетворення Фур'є дає можливість подати сигнал, що змінюється у часі, у вигляді залежності частоти і амплітуди (рис. 1). Цей графік схожий на хвилю, яка складається з декількох простих гармонік, що мають різну частоту. Відмітимо, що сума цих гармонік є періодичною функцією.

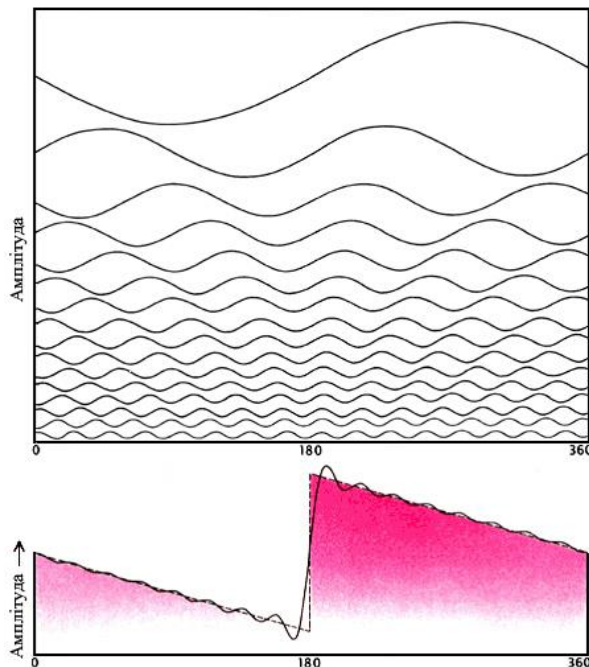


Рис. 1. Графік подання сигналу у поперечному перерізі

Описану суму можна представити рядом Фур'є у дійсній області:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Дана функція $f(x)$ є періодичною ($T = 2\pi$) і для неї виконуються умови Діріхле.

Зазначимо, що зі збільшенням числа членів ряду крива амплітуди наближається до графіка вихідної функції в усіх точках, крім точок розриву: в околах цих точок спостерігаються невеликі виступи, що зміщуються до них. Отже, при збільшенні кількості доданків «виступи» на графіку не зменшуються по амплітуді, але стають вузкими [3].

При застосуванні операції граничного переходу функція, розвинена в ряд Фур'є, за видом нагадує саму себе, проте виключення становлять точки розриву, де спостерігаються значні «виступи». Така поведінка частинних сум називається явищем Гіббса [1].

Одним із способів уникнути явища Гіббса є розклад функції в ряд Фур'є за косинусами на інтервалі $(0; \pi)$. Проте якщо функція $f(x)$, задана на інтервалі $(0; \pi)$, у точках $x=0$ та $x=\pi$ дорівнює нулю, то слід віддати перевагу розкладанню в ряд синусів, який у цьому випадку має значно кращу збіжність, ніж ряд косинусів. Це пояснюється тим, що здійснивши непарне продовження функції $f(x)$ з інтервалу $(0; \pi)$ на інтервал $(-\pi; 0)$, забезпечується неперервність не лише самої функції у цих точках, але й її першої похідної.

Нехай зображення є функцією двох змінних, визначеною в точках растрового зображення і $I(x, y)$ – значення атрибута пікселя (наприклад, номер палітри та інтенсивності кольору) залежно від колірної моделі представлення зображення (рис. 2).

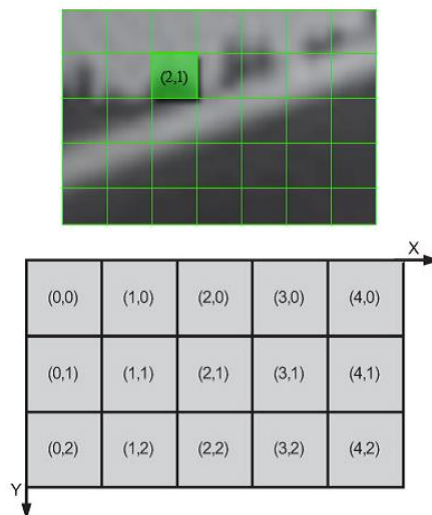


Рис. 2. Приклад розбиття рисунка на пікселі

Множина таких функцій на точках фіксованого кінцевого растрового зображення утворюють скінченний вимірний простір $R^{X,Y}$ розмірності $(m \times n \mid |X|=m, |Y|=n)$ із скалярним добутком

$$(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{m,n} I_1(i, j) I_2(i, j).$$

Цей скалярний добуток будемо ототожнювати з простором $I_2(x, y)$, у якому, як відомо, існує базис, тобто система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{k=m \times n}$ з $R^{X,Y}$ і набір коефіцієнтів $\{C_k\}_{k=1}^{k=m \times n}$, що одночасно не дорівнюють нулю, і для будь-якої функції I з даного простору виконується рівність

$$I = \sum_{k=0} C_k e_k.$$

Припустимо, що базис ортонормований. Тоді

$$(e_p, e_q) = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases} \text{ і } C_k = (I, e_k),$$

де C – множина значень атрибутів (як правило, номер палітри кольору).

Оскільки двовимірне зображення можна представити як двовимірний сигнал, то у аналоговій формі цей сигнал безперервний, а у дискретній формі – визначений лише в

точках растрового зображення. Тому для розгляду зображення у визначеному прямокутнику зручно розкласти його в ряд Фур'є.

Розглянемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення. Одновимірний сигнал представимо як зріз двовимірного зображення (рис.3).

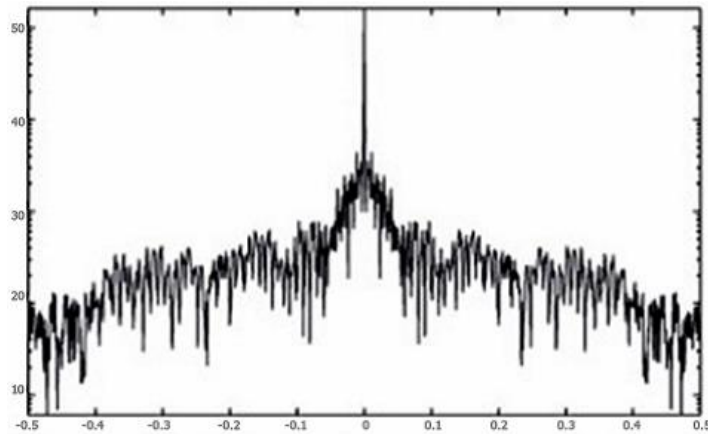


Рис. 3. Одновимірний сигнал як зріз двовимірного зображення

Дані сигнали можна розглядати у просторі R^n та у частотній області C^n .

У дискретному випадку, якщо сигнал представлений у вигляді функції визначеної в N точках $x \in 0, \dots, N-1$, використовується дискретне перетворення Фур'є, яке є рядом Фур'є.

$$F(f) = \sum_{x=0}^{N-1} I(x) \left[\cos \frac{2\pi f x}{N} - i \sin \frac{2\pi f x}{N} \right],$$

де $f \in 0, \dots, N-1$ - також є дискретною. Відповідне зворотне дискретне перетворення Фур'є у такому просторі має вигляд:

$$I(x) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} F(f) \left[\cos \frac{2\pi f x}{N} + i \sin \frac{2\pi f x}{N} \right].$$

Дискретне перетворення має дві важливі властивості:

1) коефіцієнти незалежні один від одного, тобто точність представлення одного коефіцієнта не впливає на представлення будь-якого іншого. Це дає можливість одночасно врахувати кілька чинників, що впливають на досліджуваний процес чи явище;

2) це перетворення зберігає основну інформацію за малої кількості коефіцієнтів. Така властивість проявляється на фото-реалістичних зображеннях і дозволяє досліджувати об'єкти, які перебувають у складному русі з урахуванням термонавантаження [3].

У комплексній області наша функція для всього зображення виглядатиме як

$$F(k, l) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n I(p, q) e^{-\frac{2\pi i p k}{m}} e^{-\frac{2\pi i q l}{n}}, \text{ для будь-яких } k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n.$$

Визначимо обернене перетворення Фур'є:

$$I(p, q) = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n F(k, l) e^{\frac{2\pi i k p}{m}} e^{\frac{2\pi i q l}{n}}.$$

Система функцій

$$\left\{ e^{2\pi i \left(p \frac{k}{m} + q \frac{l}{n} \right)} \right\}_{k, l}^{n, m},$$

утворює базис у просторі функцій, що описують зображення.

Алгоритм стиснення, що використовується у форматі зберігання зображень JPEG, побудований на використанні дискретного перетворення за косинусами.

Отже, високий ступінь стиснення з малими втратами інформації можна отримати лише тоді, коли є визначена кількість не рівних (не близьких) нулю коефіцієнтів ряду Фур'є.

Реальні зображення мають складну структуру, їх Фур'є-образ може і не задовольняти подібним вимогам. У такому випадку зображення розбивають на області фіксованого розміру (рис. 4-5) і виконують перетворення в кожній області окремо.

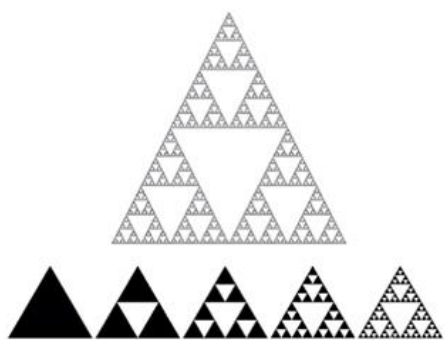


Рис.4. Побудова трикутників Серпінського



Рис. 5. Побудова трикутників Серпінського за квадратами

Кожна область такого розбиття зображення має менше особливостей, ніж усе зображення загалом. Саме тому образи Фур'є цих областей можуть виявитися більш відповідними для стиснення, ніж образ всього зображення. За таким принципом працює відомий алгоритм стиснення JPEG. Але такий підхід має й певні недоліки. Наприклад, за високого ступеня стиснення частини єдиного зображення, що опрацьовуються незалежно один від одного, можуть погано поєднуватися. Тому складається враження, що таке зображення, зібране з окремих елементів. Цей недолік мають фільми поганої якості: відео-кадр розбитий на сукупність квадратиків, що утворюють зображення з помітними їх контурами. Для усунення даного ефекту зображення відфільтровують, «знімаючи» так звані шуми, які породжують це спотворення.

Для обробки зображень в комп'ютерній графіці часто використовуються сітки. Найчастіше це трикутні сітки, які є відносно простими в обробці і дають можливість представляти об'єкти з високим ступенем точності. Треба пам'ятати, що використання рівномірної сітки не завжди виправдане, бо об'єкт може мати як фрагменти з хорошим ступенем точності зображення, так і області зі складнішою структурою. Їх слід представляти дрібнішою сіткою [3].

Отже, ряди Фур'є мають широке застосування в різних областях комп'ютерної графіки, а представлені викладки є безперечним доказом даного факту.

Список використаних джерел

1. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. – Москва: Просвещение, 1957. – 335 с.
2. Комплексний аналіз [Електронний ресурс] // Вікіпедія – вільна енциклопедія. – Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Комплексный_анализ.
3. Криштопа Л. І. Застосування рядів Фур'є в комп'ютерній графіці для автоматизації та контролю за технологічними процесами у нафтогазовій промисловості [Електронний ресурс] / Л.І.Криштопа, А.В.Сворак // – Режим доступу: <http://library.nung.edu.ua/sites/default/files/articles/583p.pdf>.

Анотація. Прасок А. Функціональні ряди на комплексній площині.

У статті розглянуто значення математичного апарату комплексних функціональних рядів при дослідженні різних процесів. В ній подані застосування даної теорії в комп'ютерній графіці при знятті шумів з неякісних відеофільмів та стисненні зображень за алгоритмом JPEG.

Ключові слова: функціональний ряд, ряд Фур'є, дискретне перетворення, обернене дискретне перетворення, алгоритм стиснення JPEG.

Abstract. Prasok A. Functional series in the complex plane.

The article exposes the importance of the use of mathematical tools of complex functional series. It submits the application of this theory in computer graphics when removing noise from low-quality video and image compression algorithm JPEG.

Keywords: functional series, Fourier series, discrete transform, inverse discrete transform, JPEG compression algorithm.

Альона Солошенко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

SoloshenkoAlyona@yandex.ua

Науковий керівник – С.В.Петренко

АДАПТАЦІЯ ПЕРШОКУРСНИКІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВНЗ

Студентство в Україні складає вагомую частку суспільства, яка зайнята специфічною працею – навчанням. За останні роки відбулося значне зростання кількості молодих людей, які здобули або здобувають вищу освіту.

З огляду на те, що молода людина, як правило, вступає у вищий навчальний заклад після закінчення середньої школи, студентів зустрічає ряд проблем, що пов'язані з недостатньою готовністю до нових умов навчання.

Студент першого курсу фізико-математичного факультету з 1-ого вересня розпочинає вивчати нові математичні дисципліни: аналітична геометрія, математичний аналіз, лінійна алгебра та інші. Аналіз рівня знань студентів показав, що математична підготовка першокурсників останніми роками недостатня для вивчення математичних дисциплін ВНЗ. Це пов'язано з тим, що важливі теми, необхідні при навчанні на математичній спеціальності, у шкільній програмі розглядаються в ознайомчому порядку або зовсім відсутні. Крім того, від школярів не вимагають знання чітких формулювань, вміння доводити теореми, виводити математичні формули.

Аналіз анкет першокурсників фізико – математичного факультету спеціальність «Математика » засвідчує, що у першокурсників слабо розвинена алгоритмічна культура, що збільшує кількість помилок при збільшенні кроків у завданні. Нерідкістю вже стало і не виконання простих завдань так тільки 30% першокурсників безпомилково справляються з дробово-раціональними виразами та тригонометричними перетвореннями, а дії з векторами з застосуванням геометричної інтерпретації виконують менше 7%. У першокурсників відсутні навички і вміння до самоорганізації, самостійності та самовідповідальності, тому важливим завданням викладача, який працює на 1-ому курсі – допомогти адаптуватися студентам до навчання у вищому навчальному закладі.

Успішність та ефективність навчання у ВНЗ залежить від багатьох чинників. З перших кроків на першому курсі навчання молоді люди включені в нове динамічне та

інтелектуально вимогливе середовище. Саме з цих перших кроків починають формуватися нові стосунки й ставлення до майбутньої професійної діяльності, до фахового оточення та його цінностей. Продовжується активний пошук особистої самоідентифікації, свого місця в рольових розподілах, узгодження в соціально-психологічних структурах студентських груп та спільнот. Ці перші кроки іноді стають дуже важливими в побудові адаптаційних програм, зумовлюючи складний перебіг подій в особистісному студентському житті молоді людини і як майбутнього фахівця, і як громадянина з відповідним життєвим рольовим репертуаром обов'язків і прав [7].

Початок занять і умов побуту означають включення студента в складну систему адаптації. Без вивчення адаптації, яка відбувається в студентській групі, не можливо оптимально організувати навчальну роботу, підняти суспільну активність, яка визначає успішну трудову діяльність після закінчення вищого навчального закладу [6].

З точки зору П.С. Кузнецова, адаптація – це процес встановлення відповідностей між рівнем актуальних проблем особистості та рівнем їх задоволення, тобто здатність відповідати вимогам і нормам навчального закладу, а також уміння розвиватися в новому для себе середовищі, реалізувати свої здібності та потреби, не вступаючи із цим середовищем у протиріччя[3].

Перший курс – це період соціально – педагогічної адаптації. З адаптацією до нових умов навчання у вищому закладі освіти зіштовхуються, у тій чи іншій формі, всі першокурсники. Проте цей процес не відбувається автоматично. Навіть на випускному курсі можна виявити особистостей, на етапі адаптації, пройшли його невдало, і в результаті не змогли скористатися багатьма можливостями, які студент може одержати навчаючись у ВНЗ.

Процес адаптації студентів першого курсу проходить через пристосування:

- до нової системи навчання;
- до зміни режиму праці та відпочинку;
- до входження в новий колектив.

Труднощі адаптації студентів на початкових етапах навчання у ВНЗ обумовлені низкою особливостей. У ВНЗ система навчання характеризується великим обсягом матеріалу, самостійністю і відповідальністю студентів. Особливості переходу із середньої школи до ВНЗ пов'язані не тільки з перебудовою провідного типу діяльності, але і з входженням особистості в новий колектив. Вступ до ВНЗ є переломною подією в житті молодих людей, тому куратор разом з викладачами, що викладають дисципліни, повинен допомогти першокурсникові пристосуватися до умов студентського життя.

Процес навчання є підпорядкованим багатьом факторам, і не всі вони сприяють успішній адаптації. Тому уявлення деяких першокурсників про процес навчання виявляються хибними, навіть наївними. Досить часто такі уявлення призводять до розчарування: заняття виявляються не настільки цікавими, підготовка до занять – надто рутинною, а саме студентське життя – не таким радісним і світлим, як здавалося. Саме тоді і починається адаптаційний процес, метою якого є знаходження нових особистісних сенсів у навчальному процесі і власне у статусі студента [1, 84-115].

Процес адаптації першокурсників до умов навчання у ВНЗ є складним та багатограним, зумовлений взаємодією психологічних, соціальних і біологічних факторів.

Соціально-психологічна адаптація студентів до навчального процесу у ВНЗ включає цілий ряд аспектів, за якими стоять різні зони труднощів, з якими доводиться стикатися студентам на початковому етапі навчання. Можна чітко виділити три головних аспекти адаптації першокурсника:

1) дидактичний, пов'язаний з пристосуванням до нової дидактичної ситуації, що відрізняється від шкільної формами та методами організації навчального процесу. Ця новизна і пов'язані з нею труднощі створюють свого роду дидактичний бар'єр, який треба подолати. Головними труднощами даного аспекту є зростання обсягу та складності навчального матеріалу, збільшення питомої ваги самостійної роботи, а також невміння працювати самостійно, планувати та розподіляти свій час та інше;

2) професійний, що передбачає формування любові до обраної спеціальності, поступове набуття професійних умінь і навичок;

3) соціально-психологічний, пов'язаний з труднощами в засвоєнні нових соціальних норм, встановленні та підтриманні студентом певного соціального статусу в новому колективі і т. ін.

Успішна адаптація до навчання у вищому навчальному закладі можлива за умови гармонійного поєднання активної позиції студента, його готовності до опанування нових знань, усвідомлення та прийняття нових норм та правил поведінки із добре спланованою та методично грамотно побудованою діяльністю викладачів. Рівень розвитку особистісних якостей студента формується ще до вступу і обумовлюється успішністю навчання у школі (наприклад, якістю підготовки), мотивацією обрання фаху, інформованістю специфікою навчання і майбутньої професійної діяльності та іншими факторами, а ефективність педагогічного процесу залежить від організаційно-педагогічних умов, які забезпечить викладач.

Значну допомогу студентам у подоланні труднощів має надавати куратор. Головне його завдання – створення згуртованого колективу студентів академічної групи, формування студента як майбутнього спеціаліста. Студентська молодь, особливо на перших курсах, не має ще необхідного життєвого досвіду, не навчилася самостійно здійснювати головні функції колективу – навчальну і виховну. Тому роль куратора на першому курсі полягає перш за все в згуртуванні колективу, подоланні роз'єднаності та відчуженості у взаємовідносинах між студентами [5].

Аналіз роботи кураторів на фізико-математичному факультеті показує, що проблеми адаптації першокурсників можна подолати завдяки контактам з викладачами, які вчать студентів як потрібно навчатися. Викладачі, що працюють з першокурсниками, повинні дотримуватись спеціальної методики читання лекцій, проведення практичних занять. У перші 2-3 місяці слід звертати увагу студентів на прийоми слухання лекції, запису її змісту, особливостей конспектування, детально роз'яснювати методику підготовки до семінарських і лабораторних занять.

Спостереження показують, що першокурсники намагаються дослівно записувати зміст лекції. Такі спроби найчастіше завершуються невдало. Несистематизовані уривчасті записи, відсутність активної мисленевої діяльності, не дають можливості відновити інформацію, отриману на лекції. Тому на перших лекціях слід цілеспрямовано і наполегливо вчити першокурсників записувати у логічній послідовності суттєві думки. Викладачеві потрібно дещо сповільнювати темп мовлення, головні думки виділяти інтонацією, і на перших порах пропонувати записувати найбільш істотне. Бажано також ознайомити студентів з вимогами до ведення конспектів:

- для кожної навчальної дисципліни слід мати окремий зошит, сторінки якого пронумерувати для полегшення пошуку інформації;

- на титульній сторінці зошита треба зазначити назву навчальної дисципліни, курс, прізвище та ініціали студента, вчений ступінь, звання, прізвище та ініціали лектора, дні та місце консультацій;

- на кожній сторінці варто залишати широке поле, на якому під час лекцій чи самостійної роботи можна робити помітки;

- записи в конспекті слід робити чорнильною ручкою, а не олівцем, писати розбірливо;

- теореми, аксіоми, означення та важливі думки, виділяти іншим кольором;

- конспектуючи лекцію, треба повністю записувати назву теми, план, рекомендовану літературу;

- особливу увагу слід приділяти чіткості записів, визначень, правил, формул, схем.

Викладачі, які викладають математичні дисципліни на 1-му курсі повинні довести необхідність вивчення предмету, його місце та роль в сучасній науці та практичній діяльності. Такий підхід допоможе студентам зрозуміти зв'язок між розділами математики та застосуванням у майбутній професії. Вчити треба так, щоб студенти чітко розуміли призначення для чого викладається теорія, сенс визначень і доказів. Важлива умова усвідомленості навчання – зв'язок знань з практичними завданнями. Студенти повинні чітко зрозуміти зв'язки між теоретичним матеріалом та практичними завданнями і навпаки. Важливо, щоб першокурсники зрозуміли, що поняття математики введені не для задоволення розуму, а для вирішення виникаючих перед ними проблем.[4]

На перших лекціях важливо зацікавити учнів у вивченні вищої математики, для цього можна використовувати бесіди про історію математики та її місце в науці. Так з'являється необхідність самостійної роботи студентів при підготовці реферату з історії математики. Викладач звертається до студентів підготувати доповідь і виступити на наступній лекції перед аудиторією. У зв'язку з тим, що багато студентів звикли до урочної системи (40 хв), рекомендується в період адаптації проводити паузи, фізичні хвилини. В цей час має сенс вислухати виступ з рефератом. Можна використовувати одну лекцію під семінар з історії математики, що допоможе адаптувати першокурсників до виконання самопідготовки і виступу біля дошки.

Слід зазначити, що процес адаптації є дуже важливими для діяльності студента у вищому навчальному закладі. Тому досягти бажаних успіхів у навчанні з перших днів у ВНЗ можлива лише тоді, коли студентам буде надаватися допомога, спрямована на подолання труднощів, що виникають в усіх аспектах їхньої адаптації.

Успішна адаптація першокурсників до життя та навчання у ВНЗ є підґрунтям подальшого розвитку кожного студента як особистості, майбутнього фахівця..

Список використаних джерел

1. Адаптация организма подростков к учебной нагрузке / [Под ред. Д.В. Колесова.] – М: Педагогика, 1987. – С. 84-115.
2. Войтович Н. Відмінності шкільного та студентського колективів як аспект проблеми адаптації першокурсників до умов ВЗО// Психологічна адаптація студентів першого курсу до умов навчання у ВЗО: 36. наук. ст. – Луцьк: держ. ун-т ім. Лесі Українки, 1999. – С. 57-65.
3. Кузнецов П.С. Концепция социальной адаптации [Текст] / П.С.Кузнецов. – Саратов: изд-во „Сарат. гос. у-т”. 2000. – 200 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. М. Наука, 1977. – 267 с.
5. Паныкович О. Проблеми адаптації у вищому закладі освіти: методики індивідуально-психологічного консультування// Психологічна адаптація студентів першого курсу до

- умов навчання у вищому закладі освіти: 36. наук. ст. – Луцьк: держ. ун-т ім. Лесі Українки, 1999. – С.70-71.
6. Пономаренко Л.А. Специфічні особливості соціально-психологічної адаптованості студентів в умовах вищого начального закладу України // Теоретичні і прикладні проблеми психології. – 2006. – №3. – С.205-213.
7. Проблеми адаптації психологів в закладах освіти // Практична психологія та соціальна робота. – 2005. – №5. – С. 13-15.

Анотація. Солошенко А. Адаптація першокурсників до вивчення математичних дисциплін у ВНЗ.

У статті розкрито організаційно-педагогічні умови адаптації студентів-першокурсників до навчання у ВНЗ та запропоновано методику введення математичних дисциплін. Актуальність дослідження обумовлена тим, що запропонована методична система дозволяє керувати процесом адаптації у стінах вищої школи безпосередньо під час навчання, не змінюючи його змісту

Ключові слова: адаптація, першокурсник, математична підготовка, навички, вміння, навчання.

Abstract. Soloshenko A. Adaptation freshmen to study mathematical sciences in high school.

The article deals with the organizational and pedagogical conditions of adaptation of first-year students to study at the university and the method of introduction of mathematical disciplines. The relevance of the study due to the fact that the proposed methodology allows the system to manage the process of adaptation in the walls of high school directly during training without changing its content.

Keywords: adaptation, freshman, mathematical education, skills, abilities, training.

Ольга Ткаченко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

olga_tkachenko92@mail.ru

Науковий керівник – О.В. Мартиненко

ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМУЛА КОШІ, НАСЛІДКИ, ЗАСТОСУВАННЯ

Математичний апарат теорії аналітичних функцій має широке коло застосувань, одними з яких є представлення гармонічної функції інтегралом Пуассона та розв'язання задачі фільтрації течій під греблями.

Розглянемо представлення гармонічної функції інтегралом Пуассона.

Нехай функція $f(z) = u + iv$ є регулярною всередині та на контурі круга K радіуса R , з центром у початку координат. Для довільної точки $z = x + yi = re^{i\psi}$, яка лежить всередині K , за інтегральною формулою Коші маємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\psi}} d\varphi. \quad (1)$$

Якщо ми візьмемо будь-яку точку z^* поза контуром K , наприклад точку $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\psi}$, то функція $\frac{f(z)}{z-z^*}$ буде регулярною всередині та на контурі круга K і матимемо місце рівність:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z-z^*} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\psi}} d\varphi = 0. \quad (2)$$

Віднімаючи від рівності (1) рівність (2), отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \left(\frac{Re^{i\psi}}{Re^{i\psi} - re^{i\varphi}} - \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\psi}} \right) d\varphi \text{ або}$$

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

Порівнюючи дійсні частини в цій рівності, матимемо формулу

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi, \quad (3)$$

яка називається *інтегральною формулою Пуассона*. [1, с. 96]

Відомо, що кожен регулярну гармонічну функцію можна розглядати як дійсну частину аналітичної функції, тому дана формула виражає значення будь-якої гармонічної функції всередині круга, через її граничні значення. Зазначимо, що частинні похідні функції $u(r, \psi)$ ($u(x, y)$) для внутрішньої точки круга знаходимо з формули (3) шляхом диференціювання під знаком інтеграла. Особливо простий вигляд (3) має за умови $r = 0$, тобто

$$u(0) = u(0, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) d\varphi. \quad (4)$$

Отже, значення регулярної гармонічної функції в середині круга дорівнює середньому арифметичному її значень на контурі цього круга.

Перейдемо до розв'язання задачі фільтрації течій під греблями.

Розглянемо фільтрацію течії під протяжною греблею за умови її перетину по середині. Таку фільтрацію можна змодельовати плоско паралельною течією.

Припустимо, що гребля бетонна; тоді межа її дотикання до ґрунту – флютбет (AB) – є непроникною для течії (Рис.1).

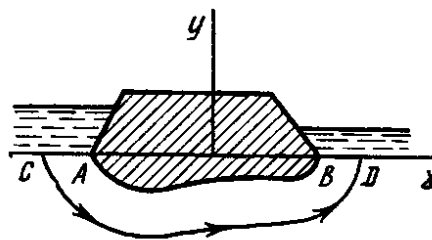


Рис. 1. Зображення непроникного флютбету у випадку бетонної греблі

Нехай, водосховище перед та за греблею (верхній і нижній б'єфи) дотикаються до ґрунту по нескінченим півпрямим CA і BD, які лежать на одній горизонталі. Будемо вважати, що ґрунт тягнеться до нескінченності та є однорідним за складом. Виберемо систему координат так, щоб вісь Oх, співпадала з границею б'єфу, а вісь Oy була напрямлена вертикально вгору.

Течія під греблею в даному випадку описується комплексним потенціалом, в якому безрозмірний потенціал ϕ і функція току якого ψ на межі б'єфів та флютбетів, задовольняють умови $\phi = \phi_1 = -P_1$, $x < A$; $\phi = \phi_2 = -P_2$, $x > B$ та $\psi = \text{const}$ вздовж AB [2, с. 33].

Даним граничним умовам при напівкруглому флютбеті заданого радіусу r_0 задовольняє комплексний потенціал, що відповідає вихрю з напругою

$$\Gamma = 2(\phi_2 - \phi_1) = 2(P_1 - P_2).$$

Потенціал і функція току обчислюються за формулами

$$\phi = (P_1 - P_2) \frac{\Theta}{\pi} - P_2, \quad \psi = \frac{(P_2 - P_1) \frac{\ln r}{r_0}}{\pi},$$

а поле тиску визначається як $P = -(\phi + \psi)$ (Рис. 2) [2, с. 33].

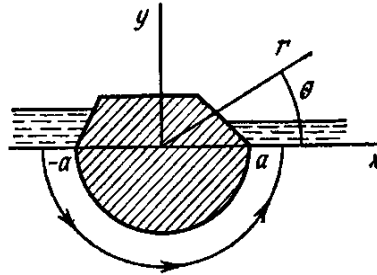


Рис. 2. Зображення напівкруглого флютбету

При конформному перетворенні площини (z) на площину $(z_1) - z = z(z_1)$ півколо радіуса $r = r_0$ переходить у заданий контур флютбету на межі б'єфів, розташованих вздовж осі Ox_1 . Це дозволить розв'язати задачу про фільтрацію під греблями при різноманітних флютбетах за допомогою комплексного потенціалу $W = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \ln z(z_1)}{\pi i}$, де $\varphi_2 - \varphi_1 = P_1 - P_2$ [2, с. 33].

Розглянемо течію під греблею з різноманітними флютбетами.

Для розв'язання такої задачі скористаємося конформним перетворенням Жуковського площини (z) на площину (z_1) :

$$z = \frac{r_0}{a+b} \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 + b^2} \right), z_1 = \frac{a+b}{2r_0} \left(z + \frac{a-b}{a+b} \frac{r_0^2}{z} \right),$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2r_0} \left(r + \frac{a-b}{a+b} \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \Theta, y_1 = \frac{a+b}{2r_0} \left(r - \frac{a-b}{a+b} \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \Theta \quad [2, \text{с. 33}].$$

Наведені формули задовольняють умови на межах б'єфів. Колам $(r = \text{const})$ та променям $(\Theta = \text{const})$ на площині (z_1) відповідають співфокусні еліпси та гіперболи, рівняння яких мають вигляд:

$$\frac{x_1^2}{(r^2(a+b) + r_0^2(a-b))^2} + \frac{y_1^2}{(r^2(a+b) - r_0^2(a-b))^2} = \frac{1}{4r_0^2 r^2},$$

$$\frac{x_1^2}{\cos^2 \Theta} - \frac{y_1^2}{\sin^2 \Theta} = a^2 - b^2 \quad [2, \text{с. 34}].$$

Звідси півколу $r = r_0$ на площині (z) буде відповідати півеліпс з півосями a та b .

Як наслідок течія під греблею з півеліптичним флютбетом на площині (z) (рис. 3) описується комплексним потенціалом:

$$W = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi i} \ln z, z_1 = \frac{a+b}{2r_0} \left(z + \frac{a-b}{a+b} \frac{r_0^2}{z} \right). \quad (5)$$

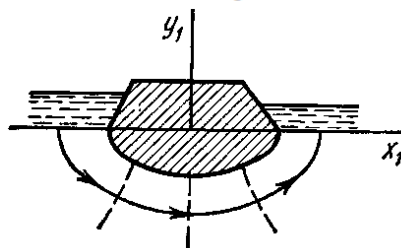


Рис. 3. Зображення пів еліптичного флютбету

Конформному перетворенню Жуковського вигляду $W = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi i} \ln z$, відповідають :

$$z_1 = \frac{a}{2r_0} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) \quad (\text{рис. 4 (а)})$$

$$z_2 = z_1 + c, c < a \quad (\text{рис. 4 (б)})$$

$$z_3 = \frac{c_1}{r_{10}} \left(z_3 + \frac{r_{10}^2}{z_3} \right), c \leq (a - c) \quad (\text{рис. 4 (в)})$$

$$z_4 = \frac{a_1 + b_1}{2r_{10}} \left(z_3 + \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \frac{r_{10}^2}{z} \right) \text{ (рис. 4 (г))}$$

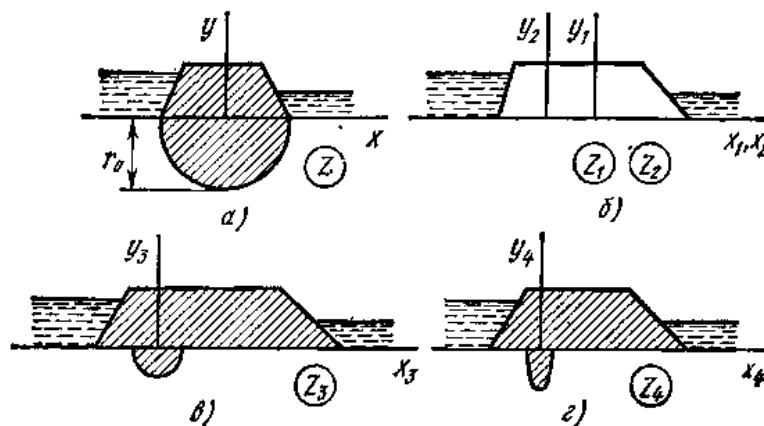


Рис. 4. Области конформних перетворень Жуковського

Дані перетворення визначають комплексний потенціал фільтрації під греблею з плоским флютбетом у площині (z_1), з напівкруглим шпунтом та плоским флютбетом в площині (z_3) з еліптичним шпунтом і плоским флютбетом в площині (z_4) відповідно.

Комплексний потенціал течії в площині (z_2) під греблею з контуром флютбету у вигляді руля Жуковського описується формулами

$$W = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi i} \ln z, \quad z = z - c,$$

$$z_2 = \frac{a}{2(r_0 - c)} \left(z_1 + \frac{(r_0 - c)^2}{z_1} \right), \quad c < r_0 \quad (6) \quad [2, \text{с. 33}]$$

Поле тиску та швидкість течії під греблею є важливими характеристиками в інженерній практиці при експлуатації гребель. Саме по заданому полю визначаються тиск фільтраційного потоку на греблю, який пов'язаний з забезпеченням її міцності, та зони, де можливе інтенсивне вимивання ґрунту, втрати рідини з водосховища за рахунок фільтрації.

Список використаних джерел

1. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной: Учеб. для вузов / Р. Курант. – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 378 с.
2. Радыгин В. М., Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов / В.М. Радыгин, О. В. Голубева. – М.: Высш. школа, 1983. – 160 с., ил.

Анотація. Ткаченко О. Інтегральна формула Коші, наслідки, застосування.

У статті показано практичне значення інтегральної формули Коші та розглянуті приклади її застосування при представленні гармонічної функції інтегралом Пуассона і при розв'язуванні задачі фільтрації течій під греблями.

Ключові слова: інтегральна формула Коші, інтеграл Пуассона, фільтрація течій під греблями, функція Жуковського.

Abstract. Tkachenko O. Integral formula of Koshi: consequences, applications.

The article shows practical value Cauchy's integral formula and discussed examples of its use in the representation of harmonic functions and Poisson integral in solving the problem of filtration currents under dams.

Keywords: Cauchy's integral formula, Poisson integral, filtration currents under dams function Zhukovsky.

Дмитро Трохимець

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

Diesel.2000@mail.ru

Науковий керівник – О.О. Одінцова

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

«Пам'ятайте: якщо ви хочете навчитися
плавати, то сміливо заходьте у воду,
а якщо хочете навчитись розв'язувати
задачі, то розв'яжуйте їх.»

Д. Пойа

Сучасний етап розвитку освіти України характеризується спрямованістю на побудову особистісно-орієнтованої системи математичної підготовки учнів, упровадженням інноваційних підходів до навчання. Модернізація національної української школи потребує підвищення активності та самостійності учнів, формування в них умінь опрацьовувати та плідно використовувати освітню інформацію в життєвих ситуаціях. Упродовж вивчення шкільного курсу математики неможливо обійтись без задач прикладного змісту. Прикладними задачами в математиці називають ті, умови яких містять нематематичні поняття [3]. За допомогою прикладних задач частково реалізується практична спрямованість навчання математики.

Практична спрямованість навчання математики – це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ прикладного змісту, на формування у школярів навичок самостійної діяльності математичного характеру. У процесі навчання прикладна і практична спрямованість звичайно функціонують спільно. Прикладна спрямованість навчання математики формує в учнів розуміння математики як методу пізнання та перетворення оточуючого світу, який має розглядатися не тільки областю застосувань математики, а й невичерпним джерелом нових математичних ідей. Навчання математичному моделюванню, застосування математичних знань до розв'язування задач прикладного змісту, що виникають поза межами математики і розв'язуються математичними методами, сприяє зміцненню мотивації навчання, системності, дієвості, гнучкості знань, стимулює пізнавальні інтереси учнів.

Практичне спрямування шкільного курсу математики передбачає формування в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення як самої математики, так і інших дисциплін. Також - використання математичних знань для пояснення виробничих циклів, процесів обслуговування та керування, полегшення вивчення інших предметів (фізики, хімії, креслення, трудового навчання тощо). Відомо, що ефективним є також навчання, яке в єдності з вихованням забезпечує активізацію мислення учнів і свідомого засвоєння ними системи наукових знань, спонукає у них бажання та потребу в цих знаннях і викликає інтерес до предмета, допомагає розвитку здібностей кожного учня, розвиває вміння та навички застосовувати отримані знання на практиці, а також самостійно здобувати ці знання. Підвищенню ефективності навчання математики сприяє розв'язування задач прикладного змісту. Звернення до прикладів із життя і навколишньої дійсності полегшує вчителю організацію цілеспрямованої навчальної діяльності учнів. Існує необхідність так організовувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим.

Прикладні задачі на уроці виконують кілька функцій. З'ясуємо які. Прикладна задача показує зв'язок математики з життям, її розв'язання підвищує загальнонаукову грамотність учнів, задача виховує інтерес до математики. Задачі прикладного змісту переконують учнів у потребі вивчення теоретичного матеріалу і показують, що математичні абстракції виникають із задач, поставлених реальним життям. Спочатку учнів зацікавлює розв'язування окремих задач, потім вивчення окремих тем, а з часом і всієї науки. Тому систематичне виховання учнівських інтересів є неодмінною умовою ефективності кожного окремого уроку і всієї навчально-виховної роботи. Одночасно учні набувають корисних навичок роботи з довідниками, навчаються самостійно знаходити потрібну інформацію в додатковій літературі.

Отже, задачі прикладного характеру виконують:

- освітню функцію, бо їх використання спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь та навичок на різних етапах навчання;
- розвиваючу функцію, бо робота з ними розвиває вміння осмислювати зміст понять, застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, розширювати кругозір, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки;
- виховну функцію, бо міжпредметні зв'язки на уроках математики можуть здійснюватися насамперед через ці задачі. Крім того практичні задачі допомагають висвітлити міжпредметні зв'язки, які в свою чергу обумовлюють поглиблене і розширене сприйняття учнями фактів, свідоме засвоєння теорії, формування цілісної картини природи. Щоб учні навчилися розв'язувати задачі, необхідно дати їм можливість самостійно працювати [2].

Основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики, такі:

1. Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань.
2. Задачі повинні відповідати шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів і фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв'язування.
3. Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою, не містити термінів, з якими учні не зустрічалися і як вимагатимуть додаткових пояснень.
4. Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим в практиці.
5. У змісті задач по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес.
6. Прикладні задачі повинні відображати ситуації промислового і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей.
7. При розв'язанні прикладних задач у класах з поглибленим вивченням математики їх формулювання може бути розширене і являти собою деяке теоретичне зведення до проблеми, що вивчається.

Як уже зазначалось під час підбору задач прикладного змісту потрібно дотримуватись певних вимог. Задача має демонструвати практичне застосування математичних ідей і методів та ілюструвати матеріал, що вивчається на певному уроці, містити відомі або інтуїтивно зрозумілі учням поняття й терміни, а також реальні числові дані, що не ведуть до громіздких обчислень. За таких умов використання прикладної задачі, складеної на матеріалах суміжних предметів, може дати потрібний

педагогічний ефект. Для різних вікових груп прийоми й методи навчання вибираю різні. Так, у 5-му класі, вивчаючи дії над натуральними (особливо багатоцифровими) числами, дітям пропонується: обчислити, скільки води, їжі потребує середньостатистична людина за своє життя, і перерахувати отримані результати на кількість товарних вагонів залізничного потяга; з'ясувати, чи може людина прожити мільйон хвилин або мільярд секунд; полічити, за скільки часу сонячне світло досягає Землі.

Розв'язування прикладних задач у шкільному курсі математики сприяє ознайомленню учнів із роботою підприємств і галузей народного господарства, викликає інтерес до різних професій. У 5-8 класах застосовую дидактичні ігри з розподіленням ролей, які відповідають різним професіям, і завданнями, які імітують вирішення певних виробничих чи побутових проблем. Використання прикладних задач дає можливість вдало створювати проблемні ситуації на уроці («Що вигідніше: будувати одноповерхові будинки з квадратною основою чи з основою у вигляді прямокутника з таким самим периметром?» тощо).

Задачі прикладного змісту забезпечують посилення мотивації навчання математики, спонукають учнів до здобуття нових знань, оволодіння новими вміннями, збагачують їх знаннями з інших дисциплін.

Мотивація, або прагнення дитини до навчання, є одним із найважливіших чинників, що забезпечують успішне сприйняття і засвоєння учнями програмового матеріалу. Одноманітна за структурою навчальна діяльність призводить до втрати інтересу, знижує ефективність сприйняття учнем матеріалу, що вивчається. Формувати мотивацію означає створити для учня такі умови та ситуації, які активізують розумову діяльність, де бажані мотиви і цілі розвиваються з урахуванням життєвого досвіду та внутрішніх прагнень самого учня. При підготовці до уроку ретельно продумана мотивація на рівні внутрішньопредметного та міжпредметних зв'язків визначає значимість теми уроку для розвитку науки, повсякденного життя, розв'язання економічних проблем, пізнання світу, фактів та явищ, підвищує усвідомлення матеріалу, що вивчається. Так, на уроці алгебри в 9 класі на тему «Графік квадратичної функції» пропонується таку задачу: «Чому іноді вигідніше (щодо економії будівельних матеріалів) будувати одноповерхові будинки з квадратною основою, ніж з основою у вигляді іншого прямокутника з таким самим периметром?»

Логіка процесу навчання полягає в русі від представлення матеріалу через пояснення до розуміння, узагальнення, використання набутих знань на практиці. Прагнення людей до знань актуальних і прикладних значно вищі, ніж до абстрактних і непрактичних. Тому поєднання теоретичних знань з можливістю їх застосування до розв'язування задач в різних галузях науки та людської діяльності підвищує значущість предмета, формує в учнів дійсні уявлення про математику та її широке прикладне спрямування. Використання міжпредметних зв'язків спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь і навичок, робота з якими розвиває вміння осмислювати зміст понять та застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки, розширює кругозір учнів. Такі задачі зумовлюють потребу у вивченні теоретичного матеріалу, свідчать, що математичні абстракції виникають із реального життя. Вони зацікавлюють розв'язуванням, вивченням окремих тем, а з часом учні відчують потребу у вивченні математики. Практичні задачі допомагають висвітлювати міжпредметні зв'язки, які, у свою чергу, зумовлюють поглиблене і розширене сприйняття учнями фактів, свідоме засвоєння теорії, формування цілісної картини природи та світу. Міжпредметні зв'язки є

відображенням тих взаємозв'язків, які діють у природі, а також є засобом, що забезпечує взаємну узгодженість учбових програм і підручників з різних предметів, слугує підвищенню наукового рівня викладання основ наук, формування діалектичного світогляду учнів, розвитку їх творчих здібностей, а також чинником взаємодії наук у процесі формування світогляду школярів і зростання їх пізнавальних інтересів.

Наведемо прикладні задачі, що демонструють зв'язки математики з іншими предметами.

Задача 1. Скільки треба взяти води при 5°C і води при 40°C, щоб отримати 15 кг суміші при 19°C?

Розв'язання. Нехай потрібно взяти x кілограмів води при 5°C. Тоді решта $(15-x)$ кг – це вода з температурою 40°C. При змішуванні води з різною температурою відбувається процес теплообміну: вода з меншою температурою 5°C, нагріваючись до 19°C, поглинає деяку кількість теплоти Q_1 , а вода з вищою температурою 40°C, охолоджуючись до 19°C, віддає деяку кількість теплоти Q_2 . Якщо вплив навколишнього на процеси, що розглядаються, незначний, то можна наближено вважати, що $Q_1 = Q_2$.

З курсу фізики відомо, що кількість теплоти, надана тілу внаслідок його нагрівання або виділена під час охолодження, залежить від маси тіла m , роду речовини c та зміни температури тіла Δt : $Q = cm\Delta t$. Коефіцієнт пропорційності c називається питомою теплоємністю речовини. Керуючись цими відомостями, визначимо Q_1 та Q_2 .

$$Q_1 = cx(19-5) = 14cx,$$

$$Q_2 = c(15-x)(40-19) = 21c(15-x),$$

де c – питома теплоємність води. Покладаючи $Q_1 = Q_2$, отримуємо рівняння: $14cx = 21c(15-x)$. Спрощуючи останнє рівняння, приходимо до лінійного рівняння $35x = 315$, розв'язок якого $x = 9$.

Отже, щоб отримати 15 кг води при 19°C потрібно взяти 9 кг води при 5°C і $15 - x = 15 - 9 = 6$ кг води при 40°C.

Відповідь. 9 кг; 6 кг

Задача 2. На прямокутній клумбі розміром 3 м $\times$ 4 м висаджено 36 кущів троянд (посадка рівномірна). На яку однакову величину треба змінити довжину та ширину клумби, щоб з такою самою щільністю посадити 90 троянд?

Розв'язання. З умови задачі безпосередньо визначаємо площу клумби: $S = 3 \cdot 4 = 12$ м². Тоді на один квадратний метр припадає $36 : 12 = 3$ кущі троянд. Отже, густина троянд на новій ділянці дорівнює 3 кущі на 1 м².

Нехай довжину та ширину клумби збільшили на x метрів. Тоді площа нової клумби дорівнює $(3 + x)(4 + x)$ м². Кількість троянд, яку можна посадити на новій ділянці, дорівнює $3(3 + x)(4 + x)$. За умовою задачі останній вираз дорівнює 90. Маємо рівняння $3(3 + x)(4 + x) = 90$.

Після спрощення отримаємо квадратне рівняння $x^2 + 7x - 18 = 0$, корені якого $x_1 = -9$, $x_2 = 2$.

Перший корінь сторонній (x – додатна величина). Другий корінь $x = 2$ задовольняє умову задачі. Отже, сторони клумби потрібно збільшити на 2 метри.

Відповідь. Сторони клумби потрібно збільшити на 2 метри.

У процесі розв'язування прикладних задач здійснюється навчання учнів елементам математичного моделювання, адже найбільш відповідальним і складним етапом розв'язування прикладної задачі є побудова її математичної моделі. Реалізація цього етапу вимагає від учнів багатьох умінь: виділяти істотні фактори, що визначають досліджуване явище (процес); вибирати математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що викликають похибку при побудові моделі. Прикладні задачі

можна умовно розділити на такі, у яких математична модель міститься в умові задачі, та такі, розв'язування яких передбачає побудову математичної моделі. Розв'язування перших значно простіше порівняно з розв'язуванням неформалізованих задач та відповідно складається з таких саме етапів, як і розв'язування будь-якої навчальної задачі. При розв'язуванні неформалізованих задач вище зазначені етапи доповнюються у зв'язку з необхідністю побудови математичної моделі.

Деякі задачі ілюструють зазначений у природи принцип оптимізації трудової діяльності (діставати найбільший ефект з найменшими затратами), інші - розвивають здібності учнів до технічної творчості (геометричні задачі на побудову тощо). Використання прикладних задач дозволяє вдало створювати проблемну ситуацію на уроці. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань, збагачування учнів теоретичними знаннями з технічних та інших дисциплін.

Цікавим і перспективним є такий спосіб демонстрації зв'язку математики з іншими науками, як проведення інтегрованих уроків. Вони допомагають знання сучасних учнів зробити ціліснішими, дозволяють позбутися ефекту «клаптикової ковдри», на них формується науковий світогляд. Такі уроки сприяють встановленню логічних зв'язків між предметами, попереджають формалізм у знаннях.

Часто в школярів виникає думка, що прикладні задачі потрібні в житті і їх слід навчитися розв'язувати, а всі інші — ні. Щоб не створювалися такі помилкові уявлення, потрібно використовувати будь-яку можливість, щоб показати та переконати учнів: майже кожна абстрактна задача може бути математичною моделлю деякої прикладної задачі. Тому слід розкривати прикладне значення матеріалу, що вивчається; наближувати зміст традиційної задачі до життєвих ситуацій; пропонувати учням складати і розв'язувати задачі (за матеріалами екскурсій, спостережень, на основі історичних довідок); розв'язувати задачі з теоретичним навантаженням суміжних дисциплін; пояснюють походження числових виразів тощо.

Для розв'язування прикладної задачі необхідно зробити кілька кроків, а саме:

- перевести умову прикладної задачі на мову математики;
- розв'язати отриману математичну задачу;
- скористатися результатами розв'язання математичної задачі, щоб знайти правильний розв'язок.

Підвищенню ефективності навчання математики сприяє розв'язування задач прикладного змісту. Звернення до прикладів із життя і навколишньої дійсності полегшує організацію цілеспрямованої навчальної діяльності учнів.

Існує необхідність так організовувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим.

Список використаних джерел

1. Грицик.Т., Забранський В. прикладні задачі під час вивчення лінійних та квадратних рівнянь // Математика в школі. – 2010. – № 12. – С. 14-19.
2. Найдьонова О. О., Канакіна Л. П. педагогічні функції прикладних задач // Математика. – 2004. – №3, січень. – С. 12.
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. – М.: Просвещение, 1990. – 95 с.

Анотація. Трохимець Д. Задачі прикладного змісту в шкільному курсі алгебри основної школи.

У статті проаналізовано роль та функції задач прикладного змісту при навчанні математики.

Ключові слова: *прикладна задача, практична задача, прикладна спрямованість, практична спрямованість.*

Summary. Trokhymets D. Tasks of applicatoin content in a course algebra of basic school.

There are analyzes role and functions of task of application content.

Keywords: *application tasks, practical tasks, application orientation, practical orientation.*

Аліна Тхоренко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

alina.lapulia@rambler.ru

Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ОРГАНІЗАЦІЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Формування в учнів навичок самостійної діяльності, творчого потенціалу і здатності використовувати знання на практиці є важливим завданням освіти. У розвитку названих якостей особистості школяра велике значення має позакласна робота, зокрема, позакласна робота з математики.

Позакласна робота дає можливість розвивати індивідуальні інтереси дітей, їхні здібності, розширювати кругозір, формувати стійкі потреби самостійно пізнавати. Вона забезпечує цікаве й корисне проведення школярами вільного часу.

Проблема організації позакласної роботи стала предметом вивчення багатьох вчених: Я.А. Коменського, В.А. Сухомлинського, А.С. Макаренка, Ю.М. Колягіна, З.І.Слепкань та багатьох інших. На їхню думку учнів потрібно привчати до самостійної роботи і виховувати в них інтерес до навчання, багато працювати з учнями, допомагати їм у навчанні, розвивати мислення, виховувати працездатність.

Під *позакласною роботою* Ю. Колягін розуміє необов'язкові систематичні заняття учнів з викладачем (вчителем) у позаурочний час і виділяє наступні види позакласної роботи:

- робота з учнями, які відстають від інших при вивченні навчального матеріалу (додаткові позакласні заняття);
- робота з учнями, які проявляють до вивчення математики підвищений, у порівнянні з іншими, інтерес та здібності (позакласна робота в традиційному розумінні цього терміну) [2, с. 336].

У якості основного принципу організації позакласної роботи виступає добровільна участь учнів, розвиток винахідливості і творчості, взаємодія різних форм і видів діяльності.

Поняття позакласної роботи з математики досліджувалось цілим рядом вітчизняних науковців. Зокрема, З.І. Слепкань під *позакласною роботою з математики* розуміє «заняття, які відбуваються в позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета завдяки поглибленню і розширенню основного змісту

програми» [4, с. 143]. Г.П. Бевз у роботі [1, с. 136] до позакласної роботи з математики відносить усі добровільні заняття, які проводять у позаурочний час у школі або поза школою і на яких учні розглядають питання математики, не передбачені програмами. С. Шумигай у статті [6, с. 34] розглядає позакласну роботу з математики як «це заняття або заходи, які проводять у позаурочний час з метою розвитку пізнавального інтересу учнів до вивчення математики, розширення здобутих на уроках знань, удосконалення вмінь та навичок» [6, с. 34].

У залежності від кількості учнів, залучених у позакласну роботу, форми такої роботи можна розподілити на *масові, групові (гурткові) та індивідуальні*. Звичайно, що такий поділ є дещо штучним і, наприклад, одні й ті ж форми позакласної роботи можуть бути як масовими, так і груповими.

Форми *масової роботи* належать до найбільш поширених у школі. Вони розраховані на одночасне охоплення багатьох учнів, їм властива барвистість, урочистість, яскравість, великий емоційний вплив на дітей. Масова робота має великі можливості активізації учнів, до неї відносять, насамперед: *конкурси, олімпіади, змагання, ігри*, які безпосередньо вимагають активності кожного учня. Також до масових форм роботи відносять *бесіди, вечори, ранки, постановка та відвідування спектаклів, зустрічі з цікавими людьми, проведення предметних тижнів та навчальних екскурсій тощо*. Зрозуміло, що при використанні масових форм позакласної роботи лише частина школярів виступає в якості організаторів і виконавців. Проте, співпереживання, що виникло від участі в загальній справі, служить важливим засобом згуртування колективу [5, с. 11].

Гурткова позакласна робота сприяє виявленню та розвитку інтересів і творчих здібностей у певній області науки, мистецтва, спорту. Найбільш поширені такі її види як: *гуртки та секції* (предметні, технічні, спортивні, художні).

У *гуртках* проводяться заняття різного типу: це *доповіді, екскурсії, виготовлення наочних посібників, лабораторні заняття, зустрічі з цікавими людьми* та ін. Звіт роботи гуртка за рік проводиться у вигляді вечора, конференції, виставки, огляду.

До *індивідуальних форм* позакласної роботи відносять самостійну діяльність окремих учнів, спрямовану на самовиховання. Це, зокрема, підготовка доповідей, номерів художньої самодіяльності, підготовка ілюстрованих альбомів тощо. Такі форми позакласної роботи дозволяють кожному знайти своє місце в загальній справі та вимагають від вихователів уміння виявити індивідуальні особливості учнів шляхом бесід, анкетування, вивчення їх інтересів [5, с. 11].

Однією з найважливіших задач проведення позакласної роботи з математики є розвиток інтересу учнів до математики, залучення учнів до занять в факультативах також їх приваблює можливість добровільної участі.

Проведення позакласної роботи з математики є одним із засобів для самовдосконалення вчителів. Однією з цілей такої роботи є розширення навчального матеріалу шкільного курсу математики, причому у багатьох випадках таке розширення суттєво виходить за рамки обов'язкової програми. Розгляд на додаткових заняттях таких питань неминуче приводить учителя до необхідності ґрунтовного опрацювання відповідного матеріалу та пошуку шляхів його викладання учням.

З іншого боку, залучення учнів до різних форм позакласної роботи з математики допомагає виявити учнів, які мають інтерес і математичні здібності, що є важливим для вирішення питання про підготовку нових математичних і науково-методичних кадрів.

За місцем проведення позакласну роботу з математики можна проводити у школах, дитячих будинках творчості, в літніх таборах.

Форми організації позакласної роботи і методи проведення її відрізняються від форм і методів проведення навчальних занять у школі. Час, кількість і види позакласних занять визначаються їх характером, метою і віком учнів.

До найбільш розповсюджених форм проведення позакласної роботи з математики відносять:

- математичні олімпіади; турніри та конкурси;
- математичні екскурсії;
- проведення тижнів математики;
- математичні гуртки;
- математичні газети та куточки.

Зупинимось більш детально на особливостях організації роботи математичного гуртка. Як правило, заняття математичного гуртка значною мірою доповнюють і продовжують роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми. Тематика занять гуртка повинна відповідати тим знанням, яких отримують учні в процесі навчання, і тому вона пов'язана з програмним матеріалом. У процесі гурткової роботи учні вчать розв'язувати математичні задачі, працювати з математичною літературою тощо. Періодичність проведення занять гуртка – раз на тиждень (іноді – раз на два тижні).

Традиційно до основних завдань, що реалізуються у ході проведення занять математичного гуртка, відносять:

- формування і розвиток розумових операцій: аналізу і синтезу, порівнянь, аналогій, класифікацій, узагальнень;
- розвиток математичних здібностей та мислення (у тому числі, творчого);
- формування та розвиток інтересу до предмета;
- розвиток пізнавальної активності та самостійної творчості;
- підготовка учнів до творчої діяльності, математичних досліджень [3, с.16].

Окрім того, на заняттях математичних гуртків здійснюється підготовка учнів до участі в математичних олімпіадах та конкурсах різних рівнів (шкільних, районних, міських, обласних, всеукраїнських та міжнародних).

Той факт, що гурткова форма позакласної роботи з математики є досить розповсюдженою у шкільній практиці, підтверджують результати проведеного нами аналізу кількох шкіл м. Суми. Дані щодо наявності математичних гуртків у шести Сумських школах, а також їх керівників подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Математичні гуртки в Сумських школах

Школа	Клас	Вчитель
Олександрівська гімназія	7	Донець Є.М.
	8	Тілеженко Т.А.
	9	Шаповалова Г.Ф.
№29	7	Білоус О.Б.
№18	7	Чернова О.Г.
Сумська гімназія №1	6	Бардакова О.Г.
№7	7	Лук'яненко К.І.
№10	6	Посенко М.І.
	7	
	9	

Тематика роботи математичних гуртків може бути різною і визначатися авторськими програмами. Єдиною вимогою залишається узгодженість змісту навчального матеріалу, який розглядається на гурткових заняттях та програмним матеріалом з математики. Окрім того, підбір матеріалу для гурткових занять має враховувати вікові особливості учнів. У таблиці 2 наведено фрагмент авторської програми роботи математичного гуртка для 5-9 класів, розробленої У. Остапчук [3, с.16].

Таблиця 2

План занять математичного гуртка для учнів основної школи

Клас	Тема заняття	Години
5	1.Організаційне заняття	2
	2.Множини. Дії над множинами	4
	3.Великі числа	4
	4.Вирази	6
	5.Цифрові задачі	6
	6.Задачі на порівняння	4
	7.Найпростіші комбінаторні задачі	6
	8.Вправи з сірниками	6
	9.Задачі на зважування	6
	10.Графи	6
	11.Сюжетні логічні задачі	6
	12.Принцип Діріхле	6
	13.Вправи з аркушем паперу	6
	14.Задачі на циферблаті годинника	6
	15.Розшифрування записів	8
	16.Магічні квадрати	6
	17.Круги Ейлера	6
	18.Задачі на переливання і перекладання	6
	19.Задачі зі старовинних рукописів і “Арифметики” Л.Магницького	8
	20.Квадрат і куб числа	4
	21.Задачі на рух	6
	22.Задачі на відсотки	6
	23.Складання задач	4
	24.Доповіді гуртківців	2
	25.Заключне заняття	2
6	1.Організаційне заняття	2
	2.Вимірювання величин	4
	3.Математичні ігри, стратегії, алгоритми	8
	4.Прийоми швидких обчислень	6
	5.Подільність і остачі	10
	6.Подорож у світ цілих чисел	8
	7.Задачі на відсотки	8
	8.Алгебраїчні задачі	6
	9.Циферблат годинника	4
	10.Логічні задачі та принцип Діріхле	4
	11.Старовинні задачі	4
	12.Розширювання записів	4

Клас	Тема заняття	Години
	13.Числа-велетні і числа-карлики	2
	14.Невизначені рівняння і скорочення дробів	2
	15.Задачі на рух	8
	16.Система числення	6
	17.Цілі числа із зазначеними властивостями	8
	18.Розв'язування задач	8
	19.Дроби	4
	20.Геометричні фігури	6
	21.Пропорції	4
	22.Математичні ігри та фокуси	4
	23.Задачі логічного змісту	4
	24.Розв'язування цікавих задач	4
	25.Модулі числа	2
	26.Математична естафета	4
	27.Математичний вечір	2
	28.Екскурсія	2
7	1.Повторення матеріалу за 6 клас. Розв'язування задач	
	2.Розв'язування задач логічного характеру	
	3.Системи числення	
	4.Подільність чисел і остачі	
	5.Задачі на рух	
	6.Розв'язування олімпіадних задач	
	7.Математика на годинниковому циферблаті	
	8.Задачі на "роботу"	
	9.Рівняння виду $ f(x) = a$ і $f(x) = a$	
	10. Рівняння виду $ f_1(x) + \dots + f_n(x) = a$	
	11.Цікаві точки і лінії трикутника	
	12.Задачі на побудову	
	13.Повторення, систематизація вивченого протягом року. Розв'язування задач	
8	I.Рівняння з одним невідомим	
	II.Системи алгебраїчних рівнянь	
	III.Абсолютна величина	
	IV.Задачі на побудову	
	V.Текстові задачі	
9	I.Функції та графіки	
	II.Нерівності. Нерівності з параметрами	
	III.Квадратний тричлен в задачах з параметром	
	IV.Геометрія на готових рисунках	
	V.Розв'язування геометричних задач. Метод базових задач	
	VI.Вибрані методи та прийоми	
	VII.Розв'язування однієї задачі різними способами	
	VIII.Розв'язування олімпіадних задач	

Отже, існує цілий ряд форм і видів позакласної роботи з математики. Кожен із них відіграє важливу роль у організації навчального процесу в цілому, сприяє розвитку особистості школяра та містить в собі певні навчальні й виховні моменти. Тому вчителі повинні враховувати особливості впровадження різних форм позакласної роботи у навчальний процес та використовувати їх під час навчання та виховання дітей.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
2. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. Вузов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин – М. : Просвещение, 1975. – 462 с.
3. План роботи гуртка з математики в 5-11 класах / У. Остапчук // Математика в школі. – 2005. – №1. – С. 16-21.
4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник / З.І. Слєпкань. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.
5. Шалина Н.В. Внеклассная работа в школе. – 2011. – №2. – С. 11.
6. Шумигай С. Історія науки у позакласній роботі / С. Шумигай // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 9. – С. 34-42.

Анотація. Тхоренко А. Організація позакласної роботи з математики в основній школі.

У статті розкрито основні поняття. Подано дослідження гуртків в Сумських школах. Наведено план роботи гуртка з математики..

Ключові слова: позакласна робота, позакласна робота з математики, математичний гурток.

Abstract. Thorenko A. Organization of extracurricular activities in mathematics in the elementary school.

The article describes the basic concepts. Posted research groups in Sumy schools. Shows the work plan of the circle math .

Keywords: class work, class work in mathematics, mathematical circle

Тетяна Чайкіна

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

yackovat@mail.ru

Науковий керівник – Ю.В. Хворостіна

ГЕОМЕТРІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ КЛАСИЧНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ФІБОНАЧЧІ

Вступ

У 1202 році Леонардо Пізанський (Фібоначчі) розглянув послідовність натуральних чисел, яка задається наступними рекурентними співвідношеннями:

$$u_0 = 1, u_1 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Ця послідовність тепер має назву класична послідовність Фібоначчі. Розглянемо ряд, членами якого є числа, обернені до членів числової послідовності Фібоначчі.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots. \quad (1)$$

Дослідженням суми цього ряду займалися різні математики (М. Laisant, Р. Erdos та R.L. Graham), зокрема, французький математик Марк Превост обґрунтував ірраціональність цієї суми.

У 1978 році французький математик Марк Превос, обґрунтував ірраціональність суми ряду (1) і показав, що це число наближено дорівнює 2,35988566.... У зв'язку з цим суму ряду (2) іноді називають константою Превоса.

Теорема 1. Для довільного дійсного числа $x \in [0; S]$, де

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{u_i} = 2,35988566..., \text{ існує розклад}$$

$$x = \sum_{k \in L} \frac{1}{u_k}. \quad (2)$$

де $L \subseteq \mathbb{N}$.

Наслідок. Для довільного $x \in [0; S]$ існує послідовність $\{f_k\}$, $f_k \in \{0,1\}$ така, що

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_0}{u_0} + \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots. \quad (3)$$

Лема 1. Для довільної послідовності $\{f_k\}$, $f_k \in \{0,1\}$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}$ збігається до деякого числа $x \in [0; S]$.

Дане твердження є наслідком наступних нерівностей:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{u_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{u_k} = S,$$

де $f_k \in \{0,1\}$.

Означення 1. Подання дійсного числа $x \in [0; S]$ у вигляді ряду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{u_k}, \quad f_k \in \{0,1\}, \quad (4)$$

називатимемо Ф-представленням цього числа. Символічно його записуватимемо

$$x \equiv \Delta_{f_0 f_1 \dots f_k \dots}^{\Phi} \quad (5)$$

і називатимемо Ф-зображення дійсного числа x . При цьому f_k називатимемо k -ою цифрою Ф-зображення числа x .

1. Подання дійсних чисел за допомогою класичної послідовності Фібоначчі

У лемі 1 описано перехід від Ф-зображення до десяткового зображення дійсних чисел. Природним є питання існування алгоритму переходу від звичного для нас десяткового зображення дійсних чисел до Ф-зображення. Тому даний параграф присвячений створенню алгоритму отримання Ф-зображення числа, поданого в десятвій системі числення.

Застосувавши наслідок з теореми 1 та лему 1, продемонструємо перехід від Φ -зображення до десяткового зображення дійсного числа.

$$\text{З наслідка 1 відомо } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_0}{u_0} + \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \dots + \frac{f_k}{u_k} + \dots = \Delta^{\Phi}_{f_0 f_1 \dots f_k \dots},$$

$$f_k \in \{0,1\}, f_1 = 0, x \in [0; S], \text{ де } S = 2,35988566\dots,$$

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, \dots u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$$

Приклад 1. Знайти десяткове зображення дійсного числа $x = \Delta^{\Phi}_{0011(0)}$ заданого у Φ -зображенні.

$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 + \dots + 0 = \frac{5}{6} = 0,8(3)$$

$$\text{Отже } x = \Delta^{\Phi}_{0011(0)} = 0,8(3)$$

Розв'язавши задачу переходу від десяткового зображення до Φ -зображення, ми створили алгоритм, який описується рекурентним співвідношенням.

Нехай x довільне дійсне число з $[0; S]$ і

$$f_0 = [x], \quad x_0 = x - f_0,$$

де $[x]$ – ціла частина числа x , тобто найбільше ціле число, що не перевищує x .

Тоді рекурентно задамо

$$f_{n+1} = [u_{n+1}x_n], \quad x_{n+1} = (u_{n+1}x_n - f_{n+1}) \frac{1}{u_{n+1}}.$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 2. Знайти Φ -зображення числа $x = 0,8(3)$, заданого у десятковій системі числення

$$f_0 = [0,8(3)] = 0, \quad x_0 = 0,8(3) - 0 = 0,8(3);$$

$$f_1 = [0,8(3)] = 0, \quad x_1 = 0,8(3) - 0 = 0,8(3);$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,8(3)] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{3}\right] = 1, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) \frac{1}{3} = 0.$$

$$\text{Отже, } x = 0,8(3) = \Delta^{\Phi}_{0011(0)}.$$

Приклад 3. Знайти Φ -зображення числа $x = 0,7$, заданого у десятковій системі числення

$$f_0 = [0,7] = 0, \quad x_0 = 0,7 - 0 = 0,7;$$

$$f_1 = [0,7] = 0, \quad x_1 = 0,7 - 0 = 0,7;$$

$$f_2 = [2 \cdot 0,7] = 1, \quad x_2 = \left(2 \cdot \frac{7}{10} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$f_3 = \left[3 \cdot \frac{1}{5}\right] = 0, \quad x_3 = \left(3 \cdot \frac{1}{5} - 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{5};$$

$$f_4 = \left[5 \cdot \frac{1}{5}\right] = 1, \quad x_4 = \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 1\right) \frac{1}{5} = 0.$$

$$\text{Отже, } x = 0,7_{10} = \Delta^{\Phi}_{00101}.$$

2. Геометрія Φ -зображення дійсних чисел

Під геометрією зображення дійсного числа розуміють геометричні властивості цифр, властивості циліндричних множин, основне геометричне відношення тощо.

Відомо, що будь-яке дійсне число x можна подати у вигляді суми його цілої та дробової частини, тобто $x = [x] + \{x\}$, де $\{x\} \in [0; 1)$. Саме дробова частина числа визначає його належність до множини дійсних чисел. Для того, щоб відрізок $[0; S]$ звузити до півсегменту $[0; 1)$, ми розглянемо лише числа які мають першу Ф-цифру рівну нулю, і тому перший доданок в сумі (4) дорівнює нулю.

Означення 2. Циліндричною множиною рангу k з основою $(c_1 c_2 \dots c_k)$, $c_i \in \{0, 1\}$, що відповідає Ф-розкладу (4) і Ф-зображенню (5), називається множина всіх чисел $x \in [0, S]$, які можуть бути подані у вигляді (4), і при цьому $f_i = c_i$, $i = \overline{1, k}$. Будемо її позначати $\Delta_{c_1 \dots c_k}$, тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_k} = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{u_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{u_i}, f_i \in \{0; 1\} \right\}. \quad (6)$$

Лема 2. Циліндрична множина рангу k з основою $(c_1 c_2 \dots c_k)$, $c_i \in \{0, 1\}$, є відрізком

$$\Delta_{c_1 \dots c_k} \equiv [\Delta_{c_1 \dots c_k 00 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_k 11 \dots}].$$

Доведення. Очевидно, що точки

$$m = \Delta_{c_1 \dots c_k 00 \dots} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{u_i}$$

і

$$M = \Delta_{c_1 \dots c_k 11 \dots} = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{u_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} = m + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}$$

є такими, що належать $\Delta_{c_1 \dots c_k}$.

Покажемо, що довільну точку $x \in [m, M]$ можна подати у вигляді

$$x = m + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{u_i}, f_i \in \{0; 1\}. \quad (7)$$

Доведемо існування послідовності $\{f_i\}$, $i \in \{k+1, k+2, \dots\}$ для якої має місце рівності (7).

Оскільки $x \in [m, M]$, то $m < x < M$. Звідки

$$0 < x - m < M - m = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}. \quad (8)$$

Очевидно, що тоді існує $k_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} \leq x - m < \sum_{i=k+1}^{k_1+1} \frac{1}{u_i},$$

і має місце нерівності

$$0 \leq x - m - \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} = x_1 < \frac{1}{u_{k_1+1}},$$

причому, як відомо, $\frac{1}{u_{k_1+1}} \leq \sum_{i=k_1+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}$. Отже,

$$x - m = \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} + x_1, \quad (9)$$

де $x_1 \in [0; \frac{1}{u_{k_1+1}})$. Якщо $x_1 = 0$, то $x = m + \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} = m + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{f_j}{u_j}$, де

$$f_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j \in \{k+1, \dots, k_1\}, \\ 0, \text{ якщо } j \in \mathbb{N} \setminus \{k+1, \dots, k_1\}. \end{cases}$$

Якщо $x_1 > 0$, то існує $k_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} \leq x_1 < \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} \frac{1}{u_i}.$$

Тоді

$$0 \leq x_1 - \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} = x_2 < \frac{1}{u_{k_2+1}},$$

причому, $\frac{1}{u_{k_2+1}} \leq \sum_{i=k_2+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}$. Звідки $x_1 = \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} + x_2$, де $x_2 \in [0; \frac{1}{u_{k_2+1}})$.

Підставивши x_1 в (9) отримаємо

$$x = m + \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} + \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} + x_2.$$

Якщо $x_2 = 0$, то розклад (10) знайдено:

$$x = m + \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} + \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} = m + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{f_j}{u_j},$$

де

$$f_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j \in \{k+1, \dots, k_1\} \cup \{k_1+2, \dots, k_2\}, \\ 0, \text{ якщо } j \in \mathbb{N} \setminus \{k+1, \dots, k_1\} \cup \{k_1+2, \dots, k_2\}. \end{cases}$$

Якщо $x_2 > 0$, то існує $k_3 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{i=k_2+2}^{k_3} \frac{1}{u_i} \leq x_2 < \sum_{i=k_2+2}^{k_3+1} \frac{1}{u_i}.$$

Здійснюючи аналогічні міркування, знаходимо $x_3, x_4, \dots$. Якщо на деякому n -му кроці отримаємо

$$x_n = x_{n-1} - \sum_{i=k_{n-1}+2}^{k_n} \frac{1}{u_i} = 0,$$

то розклад (7) знайдено:

$$x = m + \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} + \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} + \dots + \sum_{i=k_{n-1}+2}^{k_n} \frac{1}{u_i} = m + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{f_j}{u_j},$$

де

$$f_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо } j \in \{k+1, \dots, k_1\} \cup \dots \cup \{k_{n-1}+2, \dots, k_n\}, \\ 0, \text{ якщо } j \in N \setminus \{k+1, \dots, k_1\} \cup \dots \cup \{k_{n-1}+2, \dots, k_n\}. \end{cases}$$

Якщо такого скінченного n не знайдеться, то

$$0 < x_n = x_{n-1} - \sum_{i=k_{n-1}+2}^{k_n} \frac{1}{u_i} < \frac{1}{u_{k_{n+1}}},$$

причому $\frac{1}{u_{k_{n+1}}} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}$ існує $k_{n+1} > k_n$, $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{i=k_n+2}^{k_{n+1}} \frac{1}{u_i} \leq x_n < \sum_{i=k_n+2}^{k_{n+1}+1} \frac{1}{u_i}.$$

Звідки

$$0 \leq x_n - \sum_{i=k_n+2}^{k_{n+1}} \frac{1}{u_i} = x_{n+1} < \frac{1}{u_{k_{n+1}+1}}$$

і

$$x = m + \sum_{i=k+1}^{k_1} \frac{1}{u_i} + \sum_{i=k_1+2}^{k_2} \frac{1}{u_i} + \dots + \sum_{i=k_n+2}^{k_{n+1}} \frac{1}{u_i} + x_{n+1}.$$

Врахувавши, що $\frac{1}{u_{k_{n+1}+1}} \rightarrow 0$, матимемо $x_{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Лему доведено.

Перекриття циліндричних множин k -го рангу $\Delta_{\underbrace{01 \dots 1}_k} \cap \Delta_{\underbrace{10 \dots 0}_k}$ будемо позначати

$\Pi^k(01 \dots 1, 10 \dots 0), k \in \mathbb{N}$. Перекриття циліндричних множин

$\Delta_{c_1 \dots c_n} \underbrace{01 \dots 1}_m \cap \Delta_{c_1 \dots c_n} \underbrace{10 \dots 0}_m$ рангу $(n+m)$ позначимо $\Pi_{c_1 \dots c_n}^{n+m}(01 \dots 1, 10 \dots 0)$.

Основні властивості циліндричних множин:

1. Довжина циліндричної множини k -го рангу

$$|\Delta_{c_1 \dots c_k}| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

2. $\Delta_{c_1 \dots c_k c} \subset \Delta_{c_1 \dots c_k} \quad \forall c \in \{0, 1\}$.

3. $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k} = \Delta_{c_1 \dots c_k \dots}$.

4. Для основного метричного відношення має місце рівність:

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_k c}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_k}|} = \frac{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{u_{k+1}}}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}}.$$

Лема 3. Для довільного $n \geq 1$ має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_n}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = \alpha - 1, \quad (10)$$

де $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доведення. Розглянемо послідовність $\{x_n\} = \left\{ \frac{\frac{1}{u_n}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} \right\}$. Доведемо, що вона є

збіжною. Для цього покажемо, що $\{x_n\}$ - монотонна і обмежена.

Як відомо, $\frac{1}{u_{n+1}} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}$ для $\forall n \geq 1$, тому $\frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}} \leq 1$,

Тобто послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху.

Розглянемо різницю

$$x_n - x_{n+1} = \frac{\frac{1}{u_n}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} - \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = \frac{\frac{1}{u_n} \cdot \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} \cdot \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}}.$$

Знаменник останнього дробу завжди додатний, тому знак різниці $x_n - x_{n+1}$ визначається знаком чисельника. Оскільки

$$\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i} < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}$$

і

$$\frac{1}{u_n} < \frac{2}{u_{n+1}},$$

то

$$\frac{1}{u_n} \cdot \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i} < \frac{2}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}.$$

Враховуючи, що права частина останньої нерівності є сумою двох однакових доданків, можемо записати наступну правильну нерівність:

$$\frac{1}{u_n} \cdot \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i} \geq \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}$$

або

$$\frac{1}{u_n} \cdot \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i} \geq 0,$$

тобто $x_n \geq x_{n+1}$.

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є не зростаючою і обмеженою, а тому має границю (за теоремою про існування границі монотонної послідовності). Обчислимо її.

Нехай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_n}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = c.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}} \cdot \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}}{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{u_i}} \right)$$

або

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot (1 + x_{n+1}).$$

Остання рівність може бути переписана у вигляді

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot (1 + x_{n+1}).$$

Перейдемо до границі в обох частинах останньої рівності, матимемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_{n+1}).$$

Оскільки, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c$ і, як відомо [3], $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, то

$$\alpha = \frac{c}{c} \cdot (1 + c) \text{ або } \alpha = 1 + c,$$

звідки $c = \alpha - 1$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u_n}}{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{u_i}} = \alpha - 1$. Лему доведено.

Список використаних джерел

1. Василенко Н.М. Фібоначчіві подання дійсних чисел / Н.М. Василенко. – Наук. час. НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – №2. – С.1-12.
2. Волков Ю.І. Елементи дискретної математики. Навчальний посібник / Ю.І. Волков, Н.М. Войналович. – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2000. – 176 с.
3. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел / Дж. В. С. Касселс. – М.: Мир, 1965. – 422 с.

Анотація. Чайкіна Т. Геометрія зображення дійсних чисел представлених класичною послідовністю Фібоначчі.

У даній роботі розглянуто зображення дійсних чисел, які представлені за допомогою суми чисел, обернених до членів послідовності Фібоначчі. Отримано алгоритм переходу від десяткового зображення числа до Φ -зображення. Описано геометрію Φ -зображення дійсних чисел.

Ключові слова: класична послідовність Фібоначчі, Φ -зображення дійсного числа, геометрія зображення.

Abstract. Chaikina.T. Geometry image of a real numbers using Fibonacci sequence.

This article examines the F -representation of real numbers. This representation of real numbers using the Fibonacci sequence. Branch algorithm from decimal number representation to the F -representation is obtained. We have described the geometry of F -representation of the real numbers.

Keywords: Fibonacci classic sequence, F -representation of a real number, geometry of representation.

Юлія Чижикова

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

chizhikova16@yandex.ru

Науковий керівник – Т.Д. Лукашова

ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «МНОГОГРАННИКИ» У СТАРШІЙ ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Однією з основних змістових ліній шкільного курсу геометрії є лінія геометричних фігур, елементи якої починають розглядатися ще у молодшій школі, і яка пронизує увесь шкільний курс математики. Традиційно найскладніше сприймається учнями просторові фігури (тіла) та пов'язані з ними характеристики. До причин, що викликають труднощі на початку вивчення просторових фігур, науковці відносять, насамперед, погано розвинені просторові уявлення і уяву.

На просторові фігури, зокрема, на геометричні тіла (наприклад кубики), діти епізодично натрапляють у дитячому садку та у курсі математики початкової школи. Протягом навчання в основній школі учні знайомляться ще з одним із видів многогранників – прямокутним паралелепіпедом, його вимірами, а також розглядають його окремий вид – куб, використовують формули знаходження об'ємів прямокутного паралелепіпеда і куба. У 9-му класі в зміст навчального матеріалу входить вивчення окремих властивостей геометричних фігур у просторі, а саме призми та піраміди.

Завданнями освітньої галузі, що визначають зміст математичної освіти з теми «Многогранники» в основній школі, є забезпечення оволодіння учнями мовою геометрії, розвиток просторового уявлення, умінь виконувати геометричні побудови; формування знань про основні геометричні величини (довжина, площа, об'єм), способи їх знаходження для просторових фігур, формування умінь застосовувати здобуті знання у навчальних і життєвих ситуаціях. Упродовж навчання в основній школі учні здобувають базову загальну середню освіту, що разом із початковою є основою загальноосвітньої підготовки, формує в них готовність до вибору професії і реалізації шляхів подальшої освіти.

Одним із ключових напрямів модернізації та удосконалення системи освіти нашої держави є профільне навчання, що передбачає реальне й планомірне оновлення

школи старшого ступеня і має найбільшою мірою враховувати інтереси, нахили і здібності, можливості кожного учня, у тому числі з особливими освітніми потребами, у контексті соціального та професійного самовизначення і відповідності вимогам сучасного ринку праці. Такий підхід до організації освіти старшокласників не лише найповніше реалізує принцип особистісно орієнтованого навчання, а й дає змогу створити найоптимальніші умови для їхнього професійного самовизначення та подальшої самореалізації. Вивчення математики у класах різного профілю здійснюється за чотирма рівнями навчальних програм: рівнем стандарту, академічним, профільним та поглибленим рівнями.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність. Програма академічного рівня задає дещо ширший зміст і вищі вимоги до його засвоєння порівняно з рівнем стандарту. Вивчення математики на академічному рівні передбачається передусім у тих випадках, коли вона тісно пов'язана з профільними предметами і забезпечує їх ефективне засвоєння. Крім того, за цією програмою здійснюється математична підготовка старшокласників, які не визначилися щодо напрямку спеціалізації. Програма профільного рівня призначена для організації навчання математики в класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів. Зміст навчальної програми вивчення геометрії у класах з поглибленим вивченням математики передбачає поглиблене вивчення предмета. Вивчення стереометрії у класах з академічним, профільним та поглибленим рівнями навчання починається в 10-у класі, що дає час для ґрунтовного застосування стереометрії до розв'язання задач та теоретичних поглиблень окремих питань у наступному класі.

Тема «Многогранники» є, без перебільшення, центральною темою курсу стереометрії. Вивчення паралельних і перпендикулярних прямих і площин, двограних кутів, так само як і введення векторів і координат, – все це тільки початки стереометрії, підготовка засобів для дослідження її більш змістовних об'єктів – головним чином тіл і поверхонь. Крім того, многогранники самі по собі представляють надзвичайно змістовний предмет дослідження, виділяючись серед всіх тіл багатьма цікавими властивостями. Многогранникам повинно бути приділено в шкільному курсі більше уваги ще й тому, що вони дають особливо багатий матеріал для розвитку просторових уявлень [1, с. 459]. Більш того, використання многогранників з самого початку вивчення стереометрії, дозволяє реалізовувати різні дидактичні цілі.

На многогранниках зручно демонструвати взаємне розташування прямих і площин у просторі, показувати застосування ознак паралельності та перпендикулярності прямих і площин у просторі. Ілюстрація перших теорем стереометрії на конкретних моделях підвищує інтерес учнів до предмету. Отже, поняття многогранника дозволяє поєднувати наочні уявлення, розгляд реальних прикладів і логічної точності формулювань.

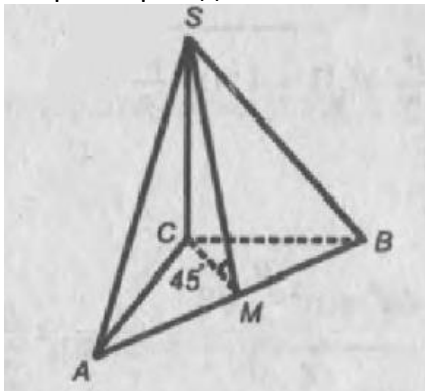
Многогранник – це тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників [2, с. 68]. Одним із важливих видів многогранників є піраміда, яку визначають як многогранник, у якого одна грань – довільний многокутник, а решта граней – трикутники, що мають спільну вершину [3, с. 335]. Такий опис дає безпосереднє уявлення про форму всіх граней піраміди. Це значно полегшує сприйняття форми піраміди, а отже, й дослідження її властивостей.

Як правило, класифікація пірамід за типами не викликає в учнів особливих

труднощів. При означенні правильної піраміди звертають увагу на два моменти: по-перше, в основі такої піраміди лежить правильний многокутник, а по-друге, висота піраміди проходить через центр описаного (і вписаного) навколо основи кола. Вимірюючи величину поверхні піраміди, застосовують вимірювання площ многокутників. Оскільки, бічними гранями піраміди є трикутники, то площа бічної поверхні є сума площ цих трикутників. Площа повної поверхні піраміди обчислюється як сума площ бічної поверхні піраміди і площі основи. Об'єм піраміди дорівнює третині від добутку площі її основи на висоту.

Проілюструємо на прикладі знаходження площі повної поверхні піраміди.

Задача. Основою піраміди є рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 4 см. Бічні грані піраміди, що містять висоти трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.



Дано: $SABC$ – піраміда;

$(SCA) \perp (ABC)$

$(SCB) \perp (ABC)$

$AC=BC = 4$ см; $\angle SMC = 45^\circ$.

Знайти: S_{π}

$$1) S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$2) AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$3) CM \perp AB; S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM;$$

$$CM = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 8}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$4) \triangle SCM - \text{прямокутний}; SC = CM = 2\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$5) \frac{CM}{SM} = \cos 45^\circ; SM = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \text{ (см)};$$

$$6) S_{\pi} = 8 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8 + 8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 8 + 16\sqrt{2} = 8 \cdot (1 + 2\sqrt{2}) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $8 \cdot (1 + 2\sqrt{2}) \text{ (см}^2\text{)}.$

Отже, многогранники вивчає розділ геометрії під назвою стереометрія. Многогранники бувають різних видів (піраміда, призма і т.д.) і мають різні властивості. Також, слід зазначити, що многогранники на відміну від плоских фігур мають об'єм і розташовуються в просторі. Більшість навколишніх предметів знаходяться в просторі, і вивчення многогранників допомагає нам скласти уявлення про них з точки зору геометрії.

Нові програми з математики для основної та профільної старшої школи побудовані з урахуванням вимог Державного стандарту базової і повної середньої освіти. Зокрема, курс геометрії основної школи пропонується будувати так, щоб елементи стереометрії тісно перепліталися з відповідним планіметричним матеріалом, що значно полегшить створення в систематичному курсі стереометрії цілісних і міцних

знань, стійких до збереження в пам'яті, сприятиме розвитку просторових уявлень та уяви учнів.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. Для студентів матем. Спеціальностей пед. Вузів. / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с.
2. Погорелов А.В. Геометрія: Підруч. Для 10-11 класів./ А.В. Погорелов. – К.: Просвіта, 2009. – 175с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник./ Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367с.

Анотація. Чижикова Ю. Вивчення теми «Многогранники» у старшій профільній школі.

У роботі розглядається вивчення теми «Многогранники» у старшій профільній школі, зокрема одного з виду многогранників – піраміди.

Ключові слова: старша профільна школа, многогранники, піраміда.

Abstract. Chizhikova Y. Study of the theme "Polyhedra" in high profile school.

This paper examines the topic "Polyhedra" in high profile school, particularly one of the type of polyhedra of the pyramid.

Keywords: high-profile school, polyhedra, pyramid.

Світлана Шевченко

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

sheva-sveta93@mail.ru

Науковий керівник – В.Ф. Власенко

ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАМЕНИТИХ ФУНКЦІЙ ДО ПОБУДОВИ КОНТРПРИКЛАДІВ

Поняття «контрприклад» широко використовується у наукових дослідженнях, математичних припущеннях, визначенні коректності означення та істинності твердження, доведенні теорем. Контрприкладами називають приклади, які спростовують ті чи інші твердження. Відмінність між прикладами та контрприкладами полягає в тому, що приклади підтверджують загальні положення, а контрприкладі ілюструють хибність і вважаються класичним засобом заперечення гіпотези [1, с. 11].

Розвиток математики та побудова контрприкладів привели до необхідності перебудови та уточнення деяких положень математичних теорій, однією з них була теорія функцій.

Як відомо, існує багато різноманітних функцій. Вони являються основним об'єктом дослідження в математичному аналізі. Проте є функції, які мають спеціальні методи дослідження, а їх специфічні властивості використовуються у контрприкладах. За останні півтора століття вони були побудовані. До них можна віднести такі визначні функції: функцію Діріхле $D(x)$, функцію Рімана $R(x)$, функцію Вейєрштрасса $V(x)$, дельта-функція Дірака $\delta(x)$ та гама-функція Ейлера $\Gamma(a)$. Розглянемо застосування даних функцій до побудови контрприкладів.

Приклад 1. Всюди розривна функція, абсолютне значення якої є всюди неперервною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне,} \\ -1, \text{ якщо } x - \text{іраціональне,} \end{cases} |f(x)| \equiv 1, x \in R.$$

Приклад 2. $\sin D(x) = \begin{cases} \sin 1, \text{ якщо } x \in Q, \\ 0, \text{ якщо } x \in I. \end{cases}$

Приклад 3. $[D(x)] = D(x)$, $\{D(x)\} \equiv 0$, де $[x]$ – ціла частина x , $\{x\}$ – дробова частина x .

Приклад 4. $y = ax^2 D(x)$, $a \neq 0$.

Розв’язання. Ця функція диференційовна в точці $x = 0$. Дійсно,

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x^2 D(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a\Delta x D(\Delta x) = 0.$$

Приклад 5. Функція

$$R_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ якщо } x = \frac{m}{n}, n \in N, m \in Z, (|m|, n) = 1, \\ 1, x = 0, \\ a, x \in I. \end{cases}$$

Розв’язання. $R_a(x)$ для $a \neq 0$ неінтегровна за Ріманом на кожному відрізку, оскільки вона розривна в кожній точці відрізка і міра множини її точок розриву більше нуля.

При $a = 0$ маємо $R_0(x) = R(x)$, $R_a(x)$ – всюди розривна, оскільки при x_0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in I \\ x \in Q}} f(x) = 0 \neq a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in I \\ x \in I}} f(x) = a.$$

Приклад 6. Чи існує функція, неперервна в кожній раціональній точці та розривна в кожній іраціональній точці прямої?

Розв’язання. Не існує, тому що множина точок розриву функції є множиною типу F_σ . А множина I іраціональних чисел не є множиною F_σ .

Приклад 7. Добуток $D(x) \cdot R(x) = R(x)$, $D(R(x)) \equiv 1$, $R(D(x)) \equiv 1$, де $D(x)$ – функція Діріхле, $R(x)$ – функція Рімана. Цей приклад цікавий тим, що суперпозиція всюди розривних функцій може бути неперервною.

Приклад 8. Приклад двох ніде не диференційованих функцій сума (різниця, добуток, частка) яких всюди диференційовна.

Розв’язання. $V(x)$ – функція Вейерштрасса (або Ван-дер-Вардена). Вона обмежена на R : $|V(x)| \leq M$. Візьмемо M_1 та M_2 так, щоб $f_1(x) = M_1 - V(x) > 0$, $f_2(x) = M_2 + V(x) < 0$, тоді $f_1(x) + f_2(x) = M_1 + M_2$.

Для різниці: $f_1(x) = M_1 + V(x)$, $f_2(x) = M_2 + V(x) \rightarrow f_1(x) - f_2(x) = M_1 - M_2$.

Для добутку: $f_1(x) = M_1 - V(x) > 0$, $f_2(x) = \frac{1}{M_1 - V(x)}$, тоді $f_1(x) \cdot f_2(x) = 1$.

Для частки: $f_1(x) = M_1 - V(x)$, $f_2(x) = C \cdot M_1 - C \cdot V(x)$, тоді $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{C}$.

Приклад 9. Функція $z = x + V(y)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 1$ і не має частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Аналогічно функція $z = y + V(x)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 1$ і не має $\frac{\partial z}{\partial x}$ в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Функція $z = V(x) + V(y)$ не має частинних похідних в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Очевидно, всі наведені три функції неперервні в кожній точці $(x; y) \in R_2$.

Приклад 10. Приклад функції $f(x)$, що має на R похідні до n -го порядку включно і не має похідної до $(n + 1)$ -го порядку на R .

$f_1(x) = \int V(x) dx$, $f_2(x) = \int f_1(x) dx$, ..., $f_n(x) = \int f_{n-1}(x) dx$. Тоді $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$, $f_n''(x) = f_{n-1}'(x)$, ..., $f_n^{(n)}(x) = f_1'(x) = V(x)$. Отже, $f_n^{(n+1)}(x)$ не існує для $\forall x \in R$.

Приклад 11. Приклад монотонної диференційованої функції, похідна якої ніде не монотонна на R .

$V(x)$ – функція Вейєрштрасса. Візьмемо $M > 0$ таке, що $V(x) + M > 0$ для $\forall x \in R$. Тоді

$$\varphi(x) = \int_0^x (V(x) + M) dx$$

строго зростає на R , оскільки $\varphi'(x) = V(x) + M > 0$, а $V(x) + M$ ніде не монотонна на R .

Приклад 12 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0).$$

Зробимо підстановку $x^m = y$, виразимо x : $x = \sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}$, $dx = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} dy$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx &= \int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}} \cdot (1-y)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} \cdot y^{\frac{1}{m}-1} dy = \frac{1}{m} \cdot \\ &\cdot \int_0^1 y^{\frac{p-1}{m} + \frac{1}{m} - 1} \cdot (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} \cdot \int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1} \cdot (1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} \cdot B\left(\frac{p}{m}; q\right). \end{aligned}$$

Приклад 13 [2]. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi, \quad (a, b > 0).$$

Поклавши $x = \sin \varphi$, зведемо даний інтеграл до інтеграла

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x^2)^{\frac{b}{2}-1} dx,$$

використовуючи приклад 4.2.1., будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \cos^{b-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Приклад 14 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1} (1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx \quad (m, n > 0)$$

Перетворимо підінтегральний вираз:

$$\begin{aligned}
 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} &= \frac{(1+x)^{2m-1}}{(1+x^2)^m} \cdot \frac{(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot \\
 &\cdot \frac{1+x}{1+x^2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right)^{n-1} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot 2^{m-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right)^{n-1} \cdot 2^{m+n-2} \cdot \\
 &\cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-2x+x^2}{2 \cdot (1+x^2)} \right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\
 &\cdot 2^{m+n-2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{2+2x^2-1-2x-x^2}{2 \cdot (1+x^2)} \right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot \\
 &\cdot 2^{m+n-2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{m-1} \cdot \left(1 - \frac{(1+x)^2}{2 \cdot (1+x^2)} \right)^{n-1} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} \cdot 2^{m+n-2}.
 \end{aligned}$$

Використаємо

підстановку

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)^2}{1+x^2},$$

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(1+x)(1+x^2) - (1+x)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(1+x)(1+x^2 - x^2 - x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2} dx, \text{ тоді отримаємо:}$$

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} \cdot 2^{m+n-2} du = 2^{m+n-2} \cdot$$

$$\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1} du = 2^{m+n-2} \cdot B(m; n).$$

Приклад 15. Знайти похідну функції

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Використаємо зв'язок похідної та інтеграла:

$$F(x) = \int_a^b y(x) dx, y(x) = \frac{dF}{dx}.$$

За означенням похідної

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta(0 + \Delta x) - \theta(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Таким чином, $\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$ (за означенням дельта-функції Дірака).

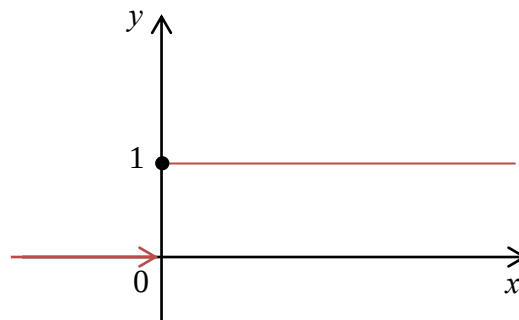


Рис. 1. Графік функції $\theta(x)$

Список використаних джерел

1. Мартиненко О. В. Контрприклад та розвиток поняття функції / О. В. Мартиненко, О. М. Бойко // Фізико-математична освіта: збірник наукових праць. – 2012. – № 1 (3). – 88 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – [3-е изд.]. – Т.2 – М. : Наука, 1951 – 800 с.

Анотація. Шевченко С. Застосування знаменитих функцій до побудови контрприкладів.

Вказується поняття «контрприкладу». Розглядається застосування функцій Діріхле, Рімана, Вейєрштрасса та дельта-функції Дірака до побудови контрприкладів. Наводяться приклади розв'язування інтегралів з параметрами за допомогою бета- та гама-функції Ейлера.

Ключові слова: функція, контрприклад, інтеграл.

Abstract. Shevchenko S. The use of well-known functions to build counterexamples.

Indicate the term "counterexample". The application features Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Dirac's delta-function to build a counterexample. Examples of solving integrals with parameters using beta- and gamma-functions Euler.

Keywords: function, counterexample, integral.

Альона Шепель

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

alionashepel@inbox.ru

Науковий керівник – В.Д.Погребний

ДОВЕДЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Вивченню різновидів виразів і перетворенню їх відведено в курсі алгебри значну частину навчального часу. Це не дивно, оскільки перетворення виразів є основою для розв'язування рівнянь і нерівностей, доведення тотожностей, обчислення значень буквених виразів. Їх широко використовують у диференціальному й інтегральному численні.

Вивчення тотожних перетворень сприяє розвитку в учнів вміння мислити згорнутими структурами (використання тотожностей дозволяє представляти формули більш лаконічно, що надає можливості оперативно і зручніше виконувати розв'язання рівнянь, обчислювати значення виразу).

Важливими є три основні аспекти:

1) формування основних понять «вирази», «числові вирази», «вирази зі змінними», «тотожність», «тотожні перетворення»; учень має знати види виразів, способи перетворення певного виду виразів, розуміти з якою метою виконується те чи інше перетворення;

2) формування в учнів навичок виконувати тотожні перетворення і розуміння, які перетворення є тотожними, а які не є тотожними;

3) застосування тотожних перетворень у ході розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем, у ході обчислень значень величин, для побудови графіків функцій, для виконання доведень.

З найпростішими числовими і буквеними виразами учні ознайомились у 1 - 6 класах, вивчали найпростіші перетворення виразів за законами арифметичних дій. У курсі алгебри постає завдання на основі вже здобутих знань і умінь систематизувати, поглибити і розширити знання, навички й уміння учнів про вирази та їх перетворення, навчити цілеспрямовано використовувати їх під час виконання різних навчальних задач (спрощення виразів, розв'язування рівнянь нерівностей, доведення тотожностей та ін.).

Програма передбачає в 7 класі повторити й уточнити відомості про числові та буквені вирази, формули, ввести поняття про тотожно рівні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразів. У цьому класі вивчають тотожні перетворення цілих виразів (одночленів і багаточленів), формули скороченого множення та застосування їх до перетворення багаточленів.

У 8 класі передбачено вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових виразів і перетворень ірраціональних виразів, пов'язаних з квадратним коренем. Розширюється поняття степеня. Зокрема, вводять поняття степеня з цілим від'ємним показником і розглядають перетворення найпростіших виразів, що містять степені з від'ємним показником.

У 9 класі тотожні перетворення цілих і дробових виразів використовуються для розв'язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь. Вивчається спеціальне перетворення - розкладання квадратного тричлена на множники, яке використовується для виведення загальної формули коренів квадратного рівняння, побудови графіка квадратичної функції.

У старшій школі учні, використовуючи здобуті раніше знання, вивчають тотожні перетворення тригонометричних, логарифмічних та показникових виразів.

Перетворення в курсі алгебри розподіляють на два класи: 1) тотожні перетворення - перетворення виразів; 2) рівносильні перетворення – перетворення формул. У разі потреби спрощення однієї частини формули в ній виокремлюють вираз, який перетворюється (використовується певне тотожне перетворення). Відповідний предикат в цьому разі не змінюється. Наприклад, $5x - 6x = 36$; $9x = 36$.

Шкільна практика свідчить, що для вивчення різних видів тотожних перетворень доцільним виявляється алгоритмічний підхід. Це означає, що вивчення кожного з видів перетворень має завершуватися (або починатися) формулюванням правила (алгоритму) перетворення.

Першим, новим для учнів перетворенням, яке трапляється в курсі алгебри 7 класу, є зведення одночленів до стандартного вигляду. Мотивують це перетворення потребою спрощення одночлена, отриманого в результаті множення двох одночленів. Важливо при цьому підкреслити теоретичну основу виконання перетворення: у разі зведення одночлена до стандартного вигляду використовують переставний, сполучний закони множення і правило множення степенів з однаковою основою.

Після розгляду кількох прикладів слід сформулювати правило: для того щоб звести одночлен до стандартного вигляду, потрібно перемножити числові множники і степені змінних з однією основою; отримане число поставити в добутку на перше місце.

Такі вміння будуть потрібні надалі під час розкладання багаточленів на множники. Піднесення одночленів до степеня не спричинює труднощів у учнів, проте деякі з них забувають підносити до степеня коефіцієнт.

До основних видів тотожних перетворень багаточленів належать: зведення багаточленів до стандартного вигляду, додавання та віднімання багаточленів, множення одночлена на багаточлен і обернене перетворення (розкладання

багаточлена на множники способом винесення спільного множника за дужки), множення багаточлена на багаточлен й обернене перетворення (розкладання багаточлена на множники способом групування).

Зведення багаточлена до стандартного вигляду виконують зведенням подібних членів. Це перетворення фактично відоме учням з 5 - 6 класів, але там воно мало іншу назву - зведення подібних доданків. Важливо, щоб учні могли пояснити теоретичну основу цього перетворення і правило його виконання: щоб звести подібні члени, потрібно додати їх коефіцієнти і приписати до отриманого числа співмножником спільну буквену частину подібних членів.

Додавання та віднімання багаточленів є позначення цих дій і зведення подібних членів. При цьому учні мають добре знати правило відкриття дужок, перед якими стоїть знак «+» або «-».

У курсі алгебри вивчають й обернене перетворення. Тому учні мають знати правило взяття багаточлена в дужки, якщо перед ними стоїть знак «+» або «-».

Множення одночлена на багаточлен також фактично відоме учням перетворення, яке вони виконували в 5 -6 класах, вивчаючи розподільний закон множення числа стосовно додавання. Труднощі у сприйманні виникають в окремих учнів під час вивчення оберненого перетворення - розкладання багаточленів на множники способом винесення спільного множника за дужки. Під час вивчення цього тотожного перетворення важливо мотивувати потребу в ньому [3, с. 203].

В процесі вивчення учні 7-9 класів повинні:

- засвоїти поняття тотожності і саму ідею тотожних перетворень;
- оволодіти умінням виконувати тотожні перетворення цілих, раціональних виразів, нескладних виразів, які містять степені і корні, тригонометричні вирази;
- засвоїти важливу ідею алгебри – ідею підстановки; якщо в тотожності замість змінної підставити вираз, то знову одержимо тотожність (при цьому треба слідкувати за допустимими значеннями змінних);
- навчитися застосувати апарат тотожних перетворень при доведенні алгебраїчних теорем, розв'язанні рівнянь і нерівностей, побудові графіків функцій.

При розв'язуванні задач з різних розділів математики досить часто виникає необхідність використання тотожних перетворень. Спрощення виразів, розклад многочленів на множники, скорочення дробів – це все приклади тотожних перетворень.

Алгебраїчні перетворення використовують для доведення алгебраїчних тотожностей, спрощення алгебраїчних виразів, для розв'язування алгебраїчних рівнянь, при обчисленні значень складних алгебраїчних виразів. Алгебраїчні вирази – це математичні вирази, що складаються з чисел і змінних за допомогою знаків додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до раціонального степеня, добування кореня і за допомогою дужок [1, с. 159].

Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Довести тотожність-це значить встановити, що для будь-якого допустимого значення змінної його ліва частина дорівнює правій частині [2, с. 36].

В алгебрі існує кілька різних способів доведення тотожностей.

Способи доведення тотожностей:

- виконати рівносильні перетворення в лівій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо праву частину, тоді тотожність вважається доведеною.

- виконати рівносильні перетворення в правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо ліву частину, тоді тотожність вважається доведеною.
- виконати рівносильні перетворення в лівій і правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо однаковий результат, тоді тотожність вважається доведеною.
- з правої частини тотожності віднімаємо ліву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеною.
- з лівої частини тотожності віднімають праву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеним.
- метод математичної індукції.

Для ілюстрації вказаних тверджень розглянемо кілька прикладів задач на алгебраїчні тотожності:

Приклад 1. Довести, якщо $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Доведення: нехай $a = -b - c$

$$\begin{aligned} (-b - c)^3 + b^3 + c^3 &= -(b + c)^3 + b^3 + c^3 = -(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) + b^3 + c^3 = \\ &= -b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3 + b^3 + c^3 = 3bc(-b - c) = 3abc \end{aligned}$$

Отримали: $3abc = 3abc$.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого натурального числа n правильною є рівність:

$$5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{n \text{ 'ятірок}} = \frac{5(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}.$$

Доведення.

Якщо $n = 1$, то $5 = \frac{5(10^2 - 9 - 10)}{81}$ - правильна числова рівність.

Припустимо, що правильною є рівність:

$$5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{k \text{ 'ятірок}} = \frac{5(10^{k+1} - 9k - 10)}{81}.$$

$$\text{Звідси } 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{k \text{ 'ятірок}} - \frac{5(10^{k+1} - 9k - 10)}{81} = 0.$$

Доведемо, що правильною буде рівність:

$$5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} = \frac{5(10^{k+2} - 9(k+1) - 10)}{81}.$$

Для цього розглянемо різницю лівої та правої частин останньої рівності. Якщо різниця дорівнює 0, то ця рівність правильна.

$$\begin{aligned} &5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} - \frac{5(10^{k+2} - 9(k+1) - 10)}{81} = \\ &= 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{k \text{ 'ятірок}} + \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} - \frac{5(10^{k+1} - 9k - 10)}{81} - \frac{9 \cdot 5 \cdot (10^{k+1} - 1)}{81} = \\ &= \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} - \frac{5 \cdot \overbrace{99\dots9}^{k+1}}{9} = \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} - \underbrace{55\dots5}_{k+1 \text{ 'ятірок}} = 0. \end{aligned}$$

Згідно принципу математичної індукції рівність:

$$5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{55\dots5}_{n \text{ п'ятірок}} = \frac{5(10^{n+1} - 9n - 10)}{81} \text{ правильна при } \forall n \in \mathbb{N} [4, \text{с.27}].$$

Тотожні перетворення складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є базою для вивчення рівнянь і нерівностей, дослідження функцій і організацій обчислень. Тотожні перетворення знаходять широке застосування в курсах геометрії, алгебри і початків аналізу, фізики, хімії і інших предметів. Від рівня сформованості навичок тотожних перетворень залежить результативність навчання учнів математики і іншим дисциплінам.

Список використаних джерел

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підручник – Х.: Гімназія, 2008. – 283 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
4. Супрун А. О., Супрун В. Є. Індукція. Принцип. Метод. Задачі. – К.: Гімназія, 2010. – 40 с.

Анотація. Шепель А. Доведення алгебраїчних тотожностей в шкільному курсі математики.

У роботі наведено поняття алгебраїчних тотожностей також розглянуто види алгебраїчних виразів та способи доведення тотожностей. Наведені кілька прикладів на доведення деяких алгебраїчних тотожностей.

Ключові слова: тотожність, алгебраїчний вираз, доведення тотожностей.

Abstract. Shepel A. The proof of algebraic identities school course in mathematics.

In this paper the concept of algebraic identities also considered types of algebraic expressions and ways of proving identities. These few examples to bring some algebraic identities.

Keywords: identity, algebraic expression proving identities.

Секція 2. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ

Анастасія Заточна

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка

nastasia-sa@mail.ru

Науковий керівник – А.О. Розуменко

КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ ЯК ФОРМА КОНТРОЛЮ

Специфіка і структура шкільного курсу математики відкривають широкі можливості для розвитку особистісних здібностей учня через опанування ним знаннями, уміннями та навичками. Під час навчання математики у нього розвиваються пам'ять, увага, просторові уявлення й уява, формуються прийоми розумової діяльності, логічне мислення тощо. Незаперечний вплив математики на формування позитивних рис характеру, світогляду. Навчання учня математики розглядається як процес розкриття й розвитку його особистості. Якість останнього забезпечується, зокрема, систематичним, цілеспрямованим контролем, мірою участі школяра у контролюючій навчальній діяльності.

Дана тема особливо актуальна нині, так як питання організації контролю та обліку знань, умінь і навичок учнів вивчені далеко не в повній мірі і існує безліч думок про те, які методи і механізми діагностування та контролювання успішності учнів більш значимі і ефективні і дають найбільш об'єктивні результати. Вчителю при підготовці до уроку необхідно пам'ятати, що пошуки відповідних форм і методів контролю та його організація - це найважливіше завдання педагога.

Проблема контролю за навчальною діяльністю учнів не нова, і педагогічний досвід накопичений у цій області багатий і різнобічний.

У сучасній дидактичній літературі поки немає єдиного підходу до визначення поняття «контроль».

Поняття контроль походить від французького controle (спостереження з метою перевірки або реєстр, перевірочний список), що у свою чергу утворилося від латинського contra rotulus, що означає зіставлення, протиставлення, тобто дослівний переклад терміну розкриває суть механізму контролю як діяльності.

За „Психологічним словником” поняття контроль трактується як „перевірка та оцінка результатів навчання, виявлення відповідності рівня засвоєння знань учнів в освітньому стандарту з даного предмету [1].

Ч. Купісевич вважає, що контроль – це діяльність, метою якої є перевірка і оцінювання результатів навчання, на основі яких вводяться дії, спрямовані на усунення виявлених недоліків [3].

Головна мета контролю як дидактичного засобу управління навчанням — забезпечення його ефективності шляхом зведення до системи знань, умінь, навичок учнів, самостійного застосування набутих знань на практиці, стимулювання навчальної діяльності учнів, формування в них міжгалузевих та компетентнісних прагнень самоосвіти, самореалізації [2].

На сьогоднішній день найбільш популярним засобом вимірюванням рівня знань суб'єкта навчання є тест. Актуальність і необхідність тестового контролю посилюється тим, що починаючи з 2002-2003 н.р. Міністерство освіти і науки України за підтримки Міжнародного фонду «Відродження» запровадило зовнішнє тестування навчальних досягнень учнів.

Слово «тест» англійського походження й означає «випробування», «перевірка».

Тести - це досить короткі, стандартизовані або не стандартизовані випробування, що дозволяють за порівняно короткі проміжки часу оцінити викладачами і учнями результативність пізнавальної діяльності учнів, тобто оцінити міру і якість досягнення кожним учнем цілей навчання [4].

Існують чотири основні форми тестових завдань:

1. Завдання з вибором однієї або кількох правильних відповідей.
2. Завдання відкритої форми. Завдання сформульовані так, що готової відповіді немає; потрібно сформулювати і вписати відповідь, у відведеному для цього місці.
3. Завдання на встановлення відповідності, де елементам однієї множини потрібно поставити у відповідність елементи іншої множини.
4. Завдання відкритої форми (на доповнення, з короткою відповіддю, з розгорнутою відповіддю).

Перераховані форми тестових завдань не вичерпують їх різноманіття. Багато що залежить від майстерності і винахідливості вчителя.

Педагогічний досвід роботи показує, що організація контролю з деяких розділів шкільного курсу з математики з використанням традиційних форм контролю викликають певні утруднення в учнів щодо їх сприйняття та практичного застосування. Це переважно тоді, коли навчальний матеріал є великим за обсягом, насиченим і вимагає додаткових контрольних засобів навчання. Одним з таких розділів є «Тригонометрія». На нашу думку, є доцільнішим більш широке впровадження в навчальний процес комп'ютерного тестування для того, щоб контроль знань учнів став більш доступним, образним, насиченим, динамічним та результативним.

Застосування контролюючих комп'ютерних програм дозволяє будувати тестові питання проблемного характеру. Використання комп'ютерів для контролю знань є економічно вигідним і забезпечує підвищення ефективності навчального процесу.

Однією з переваг комп'ютерного тестування є можливість організації контролю без обмеження його періодичності, забезпечуючи миттєве отримання достовірних результатів контролю відразу після закінчення процесу тестування. Від традиційних тестів на друкованій основі комп'ютерні тести відрізняються об'єктивністю вимірювання результатів навчання, оскільки вони спираються не на суб'єктивну думку викладачів, а на об'єктивні критерії. До того ж, результати автоматизованого тестування краще піддаються аналізу.

Однією з найпопулярніших програм для створення тестів є програма «MyTestX».

Програмне забезпечення «MyTestX» це – система програм для створення і проведення комп'ютерного тестування, збору та аналізу результатів, виставлення оцінок за певною шкалою.

Програма MyTestX є простою та зручною у використанні. У ній передбачена можливість виводу результату тесту учням на екран, а також – по локальній мережі – на комп'ютер учителя.

Програма складається з трьох модулів:

- MyTestEditor - редактор тестів, який дозволяє створювати і редагувати завдання, які складаються з питання та варіантів відповідей, правильного варіанту і необхідних ілюстрацій.

- MyTestStudent - модуль тестування в якому учні проходять тестування. Програма проста у використанні і має зручний інтерфейс. Разом з тим дозволяє ефективно організувати тестування, збереження і відправку результатів вчителю.

- MyTestServer - журнал (сервер) - модуль програми MyTestX, що дозволяє централізовано приймати і обробляти результати тестування, роздавати тести за допомогою комп'ютерної мережі.

Програмне забезпечення має досить широкі можливості по типам завдань: одиничний вибір, вибір декількох варіантів, установлення порядку проходження, установлення відповідності, завдання зі складним множинним вибором, ручне введення числа, ручне введення тексту, вибір місця на зображенні, переставлення букв, завдання типу Так/Ні. Результати тесту можуть залежати від часу тестування (в настройках тесту передбачено обмеження часу виконання всього тесту, чи відповіді на окремі запитання).

Завдання складаються з питання (можливо кілька формулювань) і, залежно від типу, варіантів відповіді або необхідної відповіді.

До кожного завдання можна прикріпити малюнок форматів *.bmp, *.gif, *.jpg*, *.wmf, який буде показаний в окремому вікні (зручно для великих малюнків). Причому, при використанні одного і того ж малюнка в різних завданнях, не збільшується розмір файлу з тестом.

Так само до завдання можна прикріпити звуковий файл у форматі mp3 або wav. У цьому випадку у вікні модуля тестування з'явиться панель з медіаплеєром. При використанні звуків, необхідно пам'ятати, що вони значно збільшують розмір файлу з тестом.

Для кожного завдання в тесті можна індивідуально задати складність (кількість балів за вірну відповідь) від 1 до 100, максимальний час виконання завдання.

До кожного завдання може бути прикріплено вступ - текст, який буде показаний спочатку показу завдання, підказка (показ може бути за штрафні бали) і пояснення вірної відповіді. Вступ і пояснення показуються в навчальному режимі.

Створений тест зберігається у єдиному стиснутому зашифрованому файлі, який містить завдання, параметри тестування, зображення до завдань для кожного окремого тесту, що також відноситься до переваг цієї тестової системи.

Оцінка учня обчислюється в балах. Рівень оцінки у відсотках задається в редакторі. Для оцінки можна вказати назву – тоді виводиться не цифра, а назва (залік / незалік). У редакторі для зручності є часто застосовані шаблони оцінювання, можна використовувати їх, а можна задати нові.

Питання про перетворення тригонометричних виразів – одне з найважливіших в тригонометричному матеріалі. Знання тотожних перетворень тригонометричних виразів є необхідним у подальшому вивченні тригонометрії при розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

Нами було розроблено підсумковий тест з теми «Перетворення тригонометричних виразів», що реалізується в програмі MyTestX

Метою тестування є здійснення підсумкового контролю в процесі вивчення даної теми. Дана форма контролю дає можливість визначити якість знань учнів з пройденого матеріалу і скоординувати подальше вивчення нового матеріалу. Тест складається з 12

запитань і оцінюється в 12 балів. На виконання комп'ютерного тестування відводиться 20 хв.

Завдання на встановлення єдиної правильної відповіді

1. Спростіть вираз: $(1 - \sin^2 x) \cdot \operatorname{tg}^2 x$.

А	Б	В	Г
1	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	0

Відповідь: Б)

2. За допомогою формул зведення знайдіть, чому дорівнює вираз $\cos(\pi - x)$.

А	Б	В	Г
$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

Відповідь: А)

3. Найменшим додатним періодом функції $y = \cos 3x$ є число:

А	Б	В	Г
2π	π	$\frac{2\pi}{3}$	3π

Відповідь: В)

4. Знайди $\cos x$, якщо відомо, що $\sin x = -\frac{4}{5}$ та $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

А	Б	В	Г
$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Відповідь: А)

5. Визначте знак функції $\sin \frac{2\pi}{3}$:

А	Б
+	-

Відповідь: А)

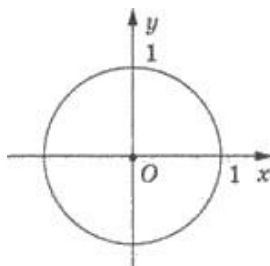
6. Подати у вигляді добутку або дробу: $\sin 2\alpha$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha$	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	$2 \sin \alpha$	$\cos 2\alpha$

Відповідь: Б)

Завдання на вибір місця на зображенні

7. Вкажіть, в якій координатній чверті знаходиться кут $\frac{5\pi}{6}$.



Відповідь: II чверть

Тест типу Так/Ні

8. Чи може $\sin \alpha$ прийняти значення $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

А	Б
Так	Ні

Відповідь: А)

Завдання на вибір декількох правильний відповідей

9. Виберіть правильне твердження.

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	$\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Відповідь: Б); Г); Д).

Завдання на встановлення відповідності

10. Встановіть відповідність для формул:

- | | |
|--|--|
| 1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$ | А. $\sin(\alpha - \beta)$ |
| 2. $\sin \alpha \sin \beta =$ | Б. 1 |
| 3. $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta =$ | В. $\sin(\alpha + \beta)$ |
| 4. $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$ | Г. $\frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ |
| | Д. $\sin \alpha + \sin \beta$ |

Відповідь: 1-Б; 2-Г; 3-А; 4-Д.

Завдання на ручне введення числа

11. Обчисліть: $\sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{\pi}{8}$.

Відповідь: 1.

12. Знайдіть значення виразу. Відповідь запишіть в десятковому вигляді.: $6 \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$.

Відповідь: 1,5.

Таким чином, аналіз педагогічного програмного засобу MyTestX, дає можливість створювати надійні тести для перевірки знань учнів. Він вирізняється зручним і зрозумілим інтерфейсом, достатньою кількістю потрібних параметрів (вибір типу завдання, обмеження часу, можливість використовувати малюнки, музичний супровід тощо).

Отже, комп'ютерне тестування розширює можливості контролю та оцінювання рівня навчальних досягнень учнів, є альтернативою традиційним методам перевірки, воно може проводитись з урахуванням різних видів та форм контролю, як інструменту оперативного керування. Такий метод оцінювання швидко, об'єктивно й ефективно діагностує результати навчальної діяльності учнів. Тому можна стверджувати, що застосування комп'ютерного тестування як компонента контролю навчальних досягнень, є ефективною і перспективною формою.

Список використаних джерел

1. Большой психологический словарь. – 4-е изд. Расширенное / Сост. и общ. ред. Б.Г. Мещеряков, В. П. Зинченко. – М.: АСТ:АСТ Москва; СПб.:Прайм-ЕВРОЗНАК, 2009. – 811 с.

2. Данканич Г.М. Організація контролю знань учнів на уроках математики. Методичні рекомендації / Г.М. Данканич. – Ужгород, 2008. – 46 с.
3. Куписевич Ч. Основы общей дидактики / Ч. Куписевич. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.
4. Швець Д. Є. Тестування як ефективна форма контролю та підвищення якості знань / Д. Є. Швець // Гуманітарний вісник Запорізької державної інженерної академії. – 2010. – Вип. 41. – С. 169-177.

Анотація. Заточна А. Комп'ютерне тестування, як форма контролю.

На основі аналізу педагогічних досліджень розглянуто сутність поняття «контроль» та «тестування». Проаналізовано програму для створення тестових завдань «MyTestX». Запропоновано підсумковий тест, створений в програмному середовищі, з теми «Перетворення тригонометричних виразів».

Ключові слова: контроль, тестування, програмне середовище MyTestX, тригонометрія.

Summary. Zatochna A. Computer testing as a form of control.

On the base of pedagogical researches the terms of «control» and «testing». Analyzed program to create test items «MyTestX». Invited to the final test, created in the software environment, entitled "Conversion of trigonometric expressions."

Keywords: control, testing, test control, program MyTesXt, trigonometry.

Світлана Шамрай

КУ Сумська загальноосвітня школа I-III ступенів № 6

**УТОЧНЕННЯ ПЕРЕЛІКУ КОМП'ЮТЕРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ,
НЕОБХІДНИХ ВЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ**

Використання засобів ІКТ вчителями математики у своїй практичній діяльності сьогодні є досить складною і актуальною проблемою, яку зумовлюють наступні суперечності:

- 1) постійний і швидкий розвиток інформаційних технологій і програмних засобів та усталені плани підготовки вчителя математики;
- 2) майже щорічне оновлення версій програм математичного спрямування і підвищення кваліфікації вчителя раз на 5 років і не обов'язково в галузі ІТ;
- 3) орієнтація шкільного навчання математики на здачу ЗНО та ДПА, які не передбачають використання комп'ютерних засобів, і активне поширення та використання математичних комп'ютерних інструментів для розв'язування типових задач;
- 4) декларативне упровадження ІТ у навчальний процес і відсутність у школах достатньої кількості комп'ютерної техніки та відповідних програм, щоб використовувати їх на уроках математики у незалежному режимі.

І якщо останні дві мають розв'язуватися на державному рівні, то перші із згаданих суперечностей можуть зникнути завдяки постійному моніторингу інформаційних засобів математичного спрямування, оновленню спецкурсів з використання спеціальних інформаційних засобів і бажання та готовності вчителя математики хоча б раз на два роки підвищувати власну кваліфікацію у галузі володіння спеціалізованими комп'ютерними інструментами.

Аналіз науково-методичних праць, дисертацій, монографій, присвячених використанню таких програм під час навчання математики виявив термінологічну обмеженість стосовно позначення дій, які можна здійснити у самому програмному засобі (зустрічалися терміни «послуга», «інструмент», «команда», «засіб»). Взаємне поєднання цих понять у роботах науковців відсутнє, тому у контексті нашого дослідження доцільним було визначити, що варто розуміти під комп'ютерним математичним інструментом.

Слово інструмент означає предмет, пристрій, механізм або алгоритм, який використовується для впливу на об'єкт: його зміни або виміри [1] в цілях досягнення корисного ефекту. В основі конструкції і правил використання інструменту лежить знання законів матеріального світу, прикладених до технології виробництва.

Комп'ютерний інструмент будемо розглядати як віртуальний механізм або алгоритм, окремий або у середовищі комп'ютерної програми, який використовується для впливу на об'єкт з одержанням необхідного кінцевого результату.

Математичні інструменти – це інструменти, що застосовуються для вивчення предметів і явищ через їх числові і геометричні характеристики, як правило вони використовуються для обчислень, вимірювань і побудов фігур.

Наведені означення дають можливість уточнити термін «Комп'ютерний математичний інструмент» – це віртуальний механізм або алгоритм комп'ютерної програми, або сама програма, що застосовується для створення або дослідження математичних об'єктів чи їх складових через числові і геометричні характеристики самих об'єктів.

З огляду на таке тлумачення терміну нами розглянуто окремі комп'ютерні програми математичного спрямування на предмет наявності у них комп'ютерних математичних інструментів. Ці програми можна вважати з одного боку комп'ютерним математичним інструментом для кожного, хто займається чи цікавиться математикою, а з іншого середовищем, де зосереджено множину різних більш вузьких комп'ютерних інструментів.

Проведений аналіз програм математичного спрямування дозволяє говорити про наявність великої кількості віртуального інструментарію на підтримку розв'язування математичних задач [7-15]. Спектр наявних інструментів настільки широкий, що вважаємо доцільним згрупувати комп'ютерні математичні інструменти, які пропонуються розробниками середовищ для підтримки навчання шкільної математики, наступним чином:

Інструменти побудов:

- побудова кривих (функцій), заданих різними способами;
- побудова динамічних геометричних об'єктів (відрізок, пряма, багатокутник тощо);
- динамічна побудова конічних перерізів;
- вимірювання довжин, кутів, площ, об'ємів тощо;
- побудова геометричного місця точок;
- знаходження точок перетину кривих;
- робота з векторами.

Інструменти алгебраїчних перетворень:

- операції з комплексними числами;
- дії з матрицями;
- перетворення математичних виразів;

Арифметичні інструменти:

- знаходження НСД та НСК двох чисел;
- розклад на прості множники;
- перевірка чисел на простоту.

Інструменти математичного аналізу:

- наближене знаходження розв'язків рівнянь, нерівностей та їх систем;
- знаходження нулів і екстремумів функції на заданому проміжку;
- обчислення границь, похідних та інтегралів.

Статистичні інструменти:

- обчислення окремих характеристик статистичних вибірок;
- побудова функцій розподілу;
- статистичний аналіз.

Методичні інструменти:

- автоматична перевірка побудов, організація тестування;
- анімація побудов.

Уточнення переліку комп'ютерних математичних інструментів нами реалізовано на основі типових задач шкільного курсу математики, існуючих програмних засобах математичного спрямування, вимог до випускника основної школи та освітніх стандартів вищої школи.

У таблиці 1 нами зазначено про наявність комп'ютерних інструментів окремих програм динамічної математики для підтримки вивчення тем шкільного курсу математики та для розв'язування типових задач.

Таблиця 1

Тема шкільного курсу та типова задача з теми	Програмне забезпечення, у якому передбачено можливість розв'язувати типові задачі теми					
	GeoGebra	GRAN 1	GRAN-2D	MathKit	Жива математика	Maple
5 клас (Математика)						
Геометричні фігури і величини <i>Задача.</i> Довжина прямокутника 20 см. Як і на скільки зміниться його площа, якщо ширину прямокутника збільшити на 2 см?	+		+	+	+	
6 клас (Математика)						
Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне <i>Задача.</i> Знайти НСД (8; 64; 320). Знайти НСК (42; 66; 90).	+					+
Коло. Довжина кола. Круг. Площа круга. Круговий сектор. <i>Задача.</i> Марійка намалювала коло, радіус якого дорівнює 6 см. Потім вона зафарбувала сектор круга, обмеженого цим колом, кут якого дорівнює 90°. Знайди площу зафарбованого сектора			+	+		+

Тема шкільного курсу та типова задача з теми	Програмне забезпечення, у якому передбачено можливість розв'язувати типові задачі теми					
	GeoGebra	GRAN 1	GRAN-2D	MathKit	Живая математик	Maple
Координатна площина. Приклади графіків залежностей між величинами Задача. Накресли гострокутний трикутник. Проведи через кожну його вершину пряму, перпендикулярну до протилежної сторони	+		+	+	+	+
7 клас (Алгебра)						
Функції Задача. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 0,5x + 1$	+	+		+	+	+
Лінійні рівняння та їх системи Задача. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння $x - y = 16$	+	+		+	+	+
8 клас (Алгебра)						
Раціональні вирази Задача. Спростіть вираз $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$						+
Квадратні корені. Дійсні числа Задача. Спростіть вираз $(b - \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})$						+
Квадратні рівняння Задача. Розв'язати рівняння $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (наближено)	+	+		+	+	+
9 клас (Алгебра)						
Нерівності Задача. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x + 3 > x \\ 4x - x < 3 \end{cases}$	+	+				+
Квадратична функція Задача. Побудуйте графік функції $y = 0,5x^2 - 2$	+	+		+	+	+
7 клас (Геометрія)						
Взаємне розміщення прямих на площині. Задача. Покажіть, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні	+		+	+	+	+
Коло і круг. Геометричні побудови. Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом між ними	+		+	+	+	

Тема шкільного курсу та типова задача з теми	Програмне забезпечення, у якому передбачено можливість розв'язувати типові задачі теми					
	GeoGebra	GRAN 1	GRAN-2D	MathKit	Живая математика	Maple
8 клас (Геометрія)						
Чотирикутники. Задача. У рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут C . Знайдіть довжину катета, якщо периметр прямокутника дорівнює 12 см.	+		+	+	+	
Многокутники. Площі многокутників. Задача. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 40 см, а одна з діагоналей 12 см.	+		+	+	+	
9 клас (Геометрія)						
Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга Задача. Довжина дуги кола дорівнює 4π см, а її градусна міра – 120° . Знайдіть радіус кола.	+		+	+	+	
Геометричні перетворення. Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони	+		+	+	+	
Початкові відомості зі стереометрії. Задача. Відрізки AB і CD перетинаються. Чи лежать в одній площині прямі AC , BD , BC і AD ?	+		+	+	+	+

У таблиці 2 нами наведено перелік тих тем, де можливо і доцільно застосовувати комп'ютерні математичні інструменти, із зазначенням програм, де ці інструменти передбачені.

Таблиця 2

Тема шкільного курсу математики	Комп'ютерний інструмент	Програма	Примітка
5 клас (Математика)			
Геометричні фігури і величини	динамічна побудова геометричних об'єктів (відрізків, пряма, многокутник тощо); вимірювання довжин, кутів, площ; обчислення площ та об'ємів геометричних фігур	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати для наочності та перевірки обчислень. Варто використовувати будь-який з запропонованих програмних засобів, крім Maple

Тема шкільного курсу математики	Комп'ютерний інструмент	Програма	Примітка
6 клас (Математика)			
Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне	знаходження НСД та НСК двох чисел; розклад на прості множники; перевірка на простоту	GeoGebra, Maple	Варто використовувати програмний засіб GeoGebra для швидких розрахунків та перевірки обчислень
Коло. Циліндр. Конус. Куля. Круг	динамічна побудова кола різними способами; обчислення площ та об'ємів геометричних фігур	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати програмний засіб GeoGebra, Matkit, GRAN або Живая математика для наочності та перевірки обчислень.
Перпендикулярні й паралельні прямі, їх побудова	динамічна побудова геометричних об'єктів (а саме прямих)	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати для наочності. Можна використовувати будь-який з указаних програмних засобів, крім Maple
Координатна площина. Приклади графіків залежностей між величинами	побудова функцій, заданих різними способами	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN 1	Доцільно використовувати будь-який програмний засіб для наочності та перевірки побудов
7 клас (Алгебра)			
Цілі вирази	перетворення математичних виразів	Maple	Доцільно використовувати вчителю
Функції	побудова функцій, заданих різними способами	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN1, Maple	Доцільно використовувати для візуальної підтримки навчального матеріалу
Лінійні рівняння та їх системи	знаходження точок перетину кривих; наближене знаходження розв'язків рівнянь та їх систем	GRAN1, Maple	Доцільно використовувати для перевірки розв'язків, організації самостійної роботи в ПЗ GRAN1

Тема шкільного курсу математики	Комп'ютерний інструмент	Програма	Примітка
8 клас (Алгебра)			
Раціональні вирази. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік та властивості	перетворення математичних виразів; побудова функцій, заданих різними способами	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN 1, Maple	Варто використовувати для перевірки розв'язків та наочності. Доцільно організовувати самостійну роботу учнів у ПЗ GRAN1 або GeoGebra
Квадратні корені. Дійсні числа. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік та властивості	елементарні перетворення та обчислення; побудова функцій, заданих різними способами	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN 1, Maple	Доцільно використовувати для перевірки обчислень та наочності. Варто організовувати самостійну роботу учнів у ПЗ GRAN1
Квадратні рівняння	знаходження точок перетину кривих; наближене знаходження розв'язків рівнянь та їх систем	GeoGebra, MathKit, GRAN 1, Maple	Доцільно використовувати для перевірки обчислень та наочності
9 клас (Алгебра)			
Нерівності	наближене знаходження розв'язків нерівностей та їх систем	GeoGebra, MathKit, GRAN 1, Maple	Доцільно використовувати для візуалізації навчального матеріалу
Квадратична функція	побудова функцій, заданих різними способами	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN 1, Maple	Доцільно використовувати для наочності. Варто організовувати самостійну роботу учнів у ПЗ GRAN1 або MathKit
Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики	знаходження ймовірності випадкової події; обчислення математичного сподівання	Maple	Доцільно використовувати для наочності, пришвидшення розрахунків
7 клас (Геометрія)			
Елементарні геометричні фігури та їх властивості	динамічна побудова геометричних об'єктів; вимірювання	GeoGebra, MathKit, Живая математика,	Доцільно використовувати програмний засіб GeoGebra або MathKit

Тема шкільного курсу математики	Комп'ютерний інструмент	Програма	Примітка
	довжин, кутів, площ; анімація побудов	GRAN-2D, Maple	
Взаємне розміщення прямих на площині	динамічна побудова геометричних об'єктів;	GeoGebra, Matkit, Живая математика, GRAN-2D	Доцільно використовувати програмний засіб GeoGebra або MathKit
Трикутники. Ознаки рівності трикутників	динамічна побудова геометричних об'єктів; вимірювання довжин, кутів, площ; анімація побудов	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати програмний засіб GeoGebra або MathKit
Коло і круг. Геометричні побудови	динамічна побудова геометричних об'єктів; динамічна побудова кола різними способами; вимірювання довжин, кутів, площ; побудова геометричного місця точок анімація побудов	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати для наочності. Варто організовувати самостійну роботу учнів у ПЗ MathKit
8 клас (Геометрія)			
Чотирикутники. Многокутники. Площі многокутників	динамічна побудова геометричних об'єктів; вимірювання довжин, кутів, площ;	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати для наочності
9 клас (Геометрія)			
Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга	динамічна побудова геометричних об'єктів; вимірювання довжин, кутів, площ;	GeoGebra, MathKit, Живая математика, GRAN-2D, Maple	Доцільно використовувати для наочності
Геометричні перетворення	побудова базових	GeoGebra, MathKit,	Доцільно використовувати для

Тема шкільного курсу математики	Комп'ютерний інструмент	Програма	Примітка
	геометричних об'єктів та похідних від них; побудова геометричного місця точок; анімація побудов	Живая математика, GRAN-2D, Maple	наочності. Варто організовувати самостійну роботу учнів у ПЗ GeoGebra

Проведене нами дослідження дозволяє стверджувати наступне.

1. Сучасна організація навчання математики має спиратися на використання інформаційних технологій та спеціалізованих програмних засобів. Це вимагає спеціальної підготовки чи підвищення кваліфікація вчителя математики.
2. Арсенал засобів навчання сучасного вчителя математики має містити комп'ютерний інструментарій, під яким розуміємо віртуальний механізм або алгоритм комп'ютерної програми, або саму програму, що застосовується для створення або дослідження математичних об'єктів чи їх складових через числові і геометричні характеристики самих об'єктів.
3. До типових комп'ютерних інструментів вчителя математики варто віднести: інструменти побудов, інструменти алгебраїчних перетворень, арифметичні інструменти, інструменти математичного аналізу, статистичні інструменти, методичні інструменти.
4. Їх вивчення і використання узгоджується з вимогами до підготовки вчителя математики і потребами сучасної шкільної математичної освіти.
5. Перспективним є дослідження питань формування компетентностей майбутнього вчителя математики у сфері залучення комп'ютерного інструментарію до забезпечення якісної професійної діяльності у рамках запровадження спеціальних курсів з вивчення предметно орієнтованих програмних засобів.

Список використаних джерел

1. Большая советская энциклопедия: в 30 т. / гл. ред. А.М. Прохоров. – 3-е. изд. – М.: Сов. энцикл., 1969-1978. – 30 т.
2. Бурда М.І. Навчальна програма з математики для 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів // М. І. Бурда, Ю. І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір. – 2012.
3. Возможности «Математического конструктора». – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://old.obr.1c.ru/mathkit/help/intro/index.html>. – Назва з екрану.
4. Позднякова Е.В. Организация учебных исследований школьников на основе компьютерной программы «Живая Геометрия» / Е.В. Позднякова, Н.А. Жучкова // Фундаментальные исследования. – 2006. – №4. – С. 46-47.
5. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики / В.М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – №4 (30). – С. 5-23.
6. Maple. Краткое пособие для первоначального знакомства. – [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://mif.vspu.ru/books/mapletut/index.html>. – Назва з екрану

7. Застосування комп'ютера при вивченні математики: [навчальний посібник] / Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. – Суми, 2014. – 179 с. (електронний ресурс)
8. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Використання комп'ютерних інструментів IRC Cabri 3D при розв'язуванні задач стереометрії / Олена Семеніхіна, Марина Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – №4. – С. 36-41.
9. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Комп'ютерні інструменти програм динамічної математики і методичні проблеми їх використання [Електронний ресурс] / Семеніхіна Олена Володимирівна, Друшляк Марина Григорівна // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Том 42, № 4. – С. 109-117.
10. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Геометричні перетворення на площині і комп'ютерні інструменти їх реалізації // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2014. – №7-8. – С. 25-29.
11. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Створення власних комп'ютерних інструментів у середовищах динамічної математики / Олена Семеніхіна, Марина Друшляк // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2014. – №5. – С. 60-69.
12. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Інструменти контролю в ІГС Математичний конструктор // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету: зб. наук. праць / ред. кол.: І.П.Аносов (голов. ред.) та ін. – Мелітополь: Вид-во „Мелітополь”, 2014. – 395 с. – (Серія „Педагогіка”; вип. 13 (2)) – С.189-196.
13. Elena Semenikhina, Marina Drushlyak. Computer Mathematical Tools: Practical Experience of Learning to use them // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(9), № 3. – Pp. 175-183.
14. Elena Semenikhina. Development of Dynamic Visual Skills SKM MAPLE among Future Teachers // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(10), № 4. – Pp. 265-272. (http://ejournal1.com/journals_n/1417761453.pdf)

Анотація. Шамрай С. Уточнення переліку комп'ютерних математичних інструментів, необхідних вчителю математики.

У статті розглянуто термін «комп'ютерний математичний інструмент» та уточнено перелік комп'ютерних математичних інструментів на основі типових задач шкільного курсу математики, існуючих програмних засобах математичного спрямування.

Ключові слова: математичний інструмент, комп'ютерна програма, комп'ютерний математичний інструмент, шкільний курс математики, математичні задачі.

Summary. Shamray S. Updating of the list of computer mathematical tools necessary mathematics teacher.

In the article, the term "computer mathematical tool" and specify the list of computer mathematical tools based on the typical tasks of school mathematics, existing software tools for mathematical sciences.

Keywords: mathematical tool, computer software, computer mathematical tool, school mathematics, mathematical problems.

Інна Шевченко

КУ Сумська спеціалізована школа I-III ступенів №7

inna-shevchenko@mail.ua

ПРО ТЕХНОЛОГІЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ У ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Через інтенсивну інформатизацію суспільства проблеми структурування знань та оперативного їх використання набувають особливого значення. Тому потреба у систематизації накопиченого досвіду візуалізації навчальної інформації і його наукового обґрунтування з позицій технологічного підходу до навчання є актуальним питанням сьогодення.

Термін «візуалізація» походить від латинського *visualis* – сприймається візуально, наочно. *Візуалізація інформації* – уявлення числової і текстової інформації у вигляді графіків, діаграм, структурних схем, таблиць, карт і т.д. Однак таке розуміння візуалізації як процесу спостереження передбачає мінімальну розумову і пізнавальну активність учнів, а візуальні дидактичні засоби виконують лише ілюстративну функцію. Інше визначення візуалізації дається у відомих педагогічних концепціях (теорії схем – Р.С. Андерсон, Ф. Бартлетт; теорії фреймів – Ч. Фолкер, М. Мінський і ін.), у яких цей феномен тлумачиться як винесення в процесі пізнавальної діяльності з внутрішнього плану на зовнішній план мислеобразів, форма яких стихійно визначається механізмом асоціативної проекції.

Аналогічним чином поняття візуалізації розуміє Вербицький А.А.: «Процес візуалізації – це згортання розумових змістів у наочний образ; будучи сприйнятим, образ може бути розгорнутий і служити опорою адекватних розумових і практичних дій» [2]. Дане визначення дозволяє розвести поняття «візуальний», «візуальні засоби» від понять «наочний», «наочні засоби». У педагогічному значенні поняття «наочний» завжди засноване на демонстрації конкретних предметів, процесів, явищ, уявлення готового образу, заданого ззовні. Процес розгортання мислеобразу і «винесення» його з внутрішнього плану на зовнішній план являє собою проекцію психічного образу. Проекція вбудована в процеси взаємодії суб'єкта та об'єктів матеріального світу, вона спирається на механізми мислення, охоплює різні рівні відображення і відображення, проявляється в різних формах навчальної діяльності.

За класифікацією Г.К. Селевко, технологія інтенсифікації навчання на основі схемних і знакових моделей навчального матеріалу належить до групи педагогічних технологій активізації та інтенсифікації діяльності учнів. За цільовою орієнтацією вона спрямована на:

- формування знань, умінь, навичок;
- навчання всіх категорій учнів, незалежно від індивідуальних особливостей;
- прискорене навчання.

До групи технологій візуалізованого навчання також можна віднести квантове навчання, запропоноване американськими авторами Б. Депортер і М. Хенакі, методику прискореного навчання Б.Ц. Бадмаєва на основі ОСВД (оперативної схеми виконання дій), ООД (орієнтовної основи діяльності) і деякі інші.

Досвід В.Ф. Шаталова є прикладом побудови технології навчання на основі схемних і знакових моделей навчального матеріалу, яку автор [7] пропонує називати технологією візуалізації навчального матеріалу, розуміючи під цим не тільки знакові,

але й деякі інші образи «візуалізації», які виступають на перший план в залежності від специфіки об'єкту, що вивчається. Це можуть бути наступні базові елементи зорового образу: точка, лінія, форма, напрямок, тон, колір, структура, розмір, масштаб, рух. Присутні у тій чи іншій мірі в будь-якому зоровому образі, ці елементи кардинально впливають на сприйняття та освоєння людиною навчальної інформації. Інтенсифікація навчально-пізнавальної діяльності відбувається за рахунок того, що і педагог, і учень орієнтуються не тільки на засвоєння знань, але й на прийоми цього засвоєння, на способи мислення, що дозволяє побачити зв'язки і відношення між об'єктами, а значить, зв'язати окреме у єдине ціле.

Технологія візуалізації навчальної інформації – це система, яка включає в себе складові (рис.1).

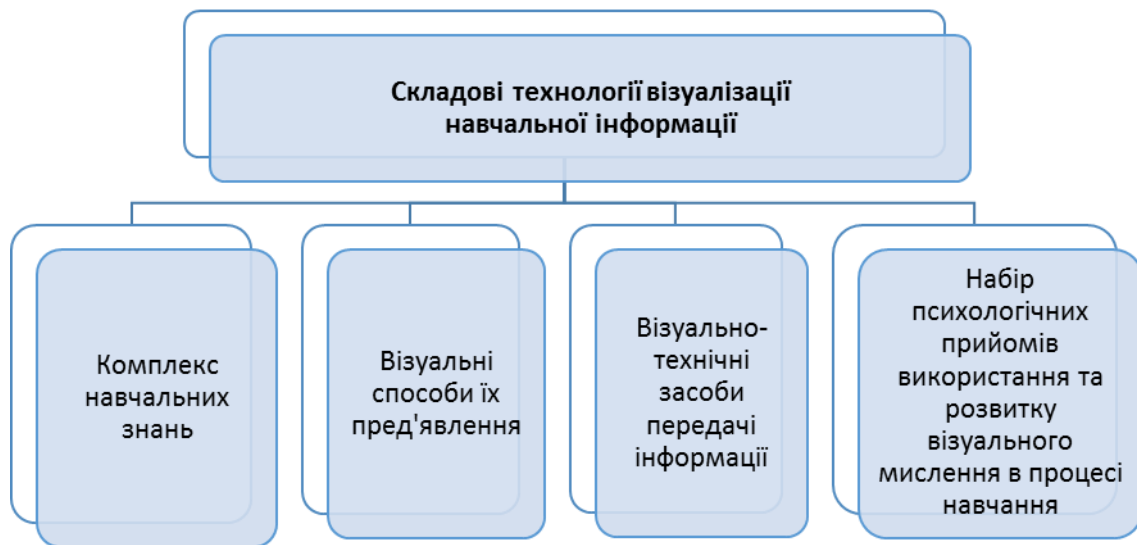


Рис. 1. Складові технології візуалізації навчальної інформації

Технологія візуалізації навчального матеріалу корелює з педагогічною концепцією візуальної грамотності, яка виникла в кінці 60-х років XX століття в США. Ця концепція ґрунтується на положеннях про значущість візуального сприйняття для людини в процесі пізнання світу і свого місця в ньому, провідної ролі образу в процесах сприйняття і розуміння, необхідності підготовки свідомості людини до діяльності в умовах все більш «візуалізаційного» світу і збільшення інформаційного навантаження.

Інформаційна насиченість сучасного світу вимагає спеціальної підготовки навчального матеріалу перед його пред'явленням учням. Візуалізація передбачає згортання інформації в початковий образ (наприклад, в образ емблеми, герба і т.п.). Слід враховувати також можливості використання слухової, нюхової, дотикової візуалізації, якщо саме ці відчуття є значущими у даній професії.

Ефективним способом обробки та компонування інформації є її «стиснення», тобто подання у компактному, зручному для використання вигляді. До основ стиснення навчальної інформації можна віднести також теорію змістовного узагальнення В.В. Давидова [3], теорію укрупнення дидактичних одиниць П.М. Ердієва [9]. Під «стисненням» інформації розуміється перш за все її узагальнення, систематизація. П.М. Ердієв стверджує, «що найбільша міцність засвоєння програмного матеріалу досягається при подачі навчальної інформації одночасно на чотирьох кодах: малюнковому, числовому, символічному, словесному». Слід також врахувати, що

здатність перетворювати усну та письмову інформацію у візуальну форму є професійною якістю багатьох фахівців. Отже, в процесі навчання повинні формуватися елементи професійного мислення: систематизація, концентрація, виділення головного у змісті.

Усілякі типи моделей подання знань у стислому компактному вигляді відповідають властивості людини мислити образами. Вивчення, засвоєння, обдумування тексту – це і є складання схем, кодування матеріалу. При необхідності людина може відновити, «розгорнути» весь текст, але його якість і міцність буде залежати від якості та міцності цих схем у пам'яті, від того, створені вони інтуїтивно учнем або професійно – викладачем.

Методологічний фундамент технології візуалізації складають принципи її побудови: принцип системного квантування і принцип когнітивної візуалізації (рис.2).

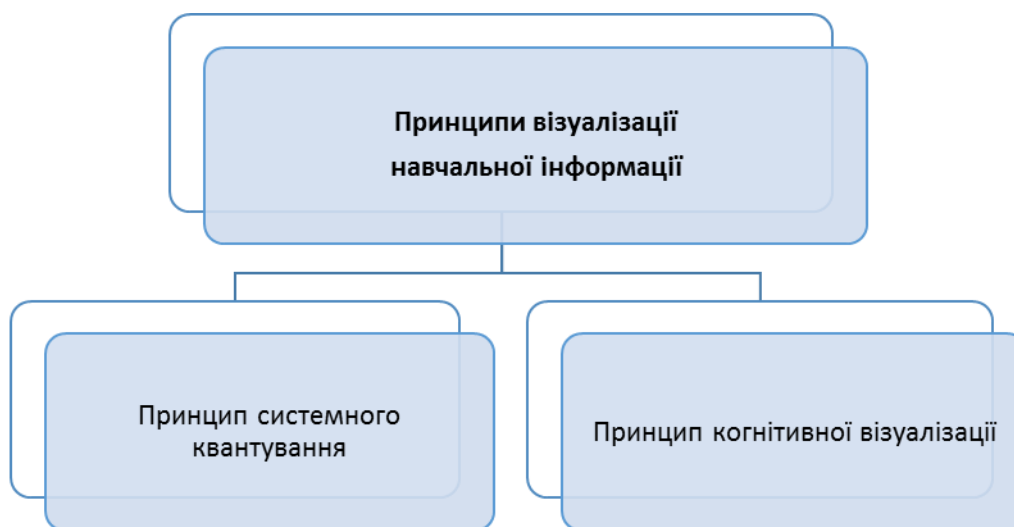


Рис. 2. Принципи візуалізації навчальної інформації

Принцип системного квантування передбачає дотримання наступних закономірностей:

- навчальний матеріал великого обсягу запам'ятовується з працею;
- навчальний матеріал, розташований компактно в певній системі, краще сприймається;
- виділення в навчальному матеріалі смислових опорних пунктів сприяє ефективному запам'ятовуванню.

Принцип когнітивної візуалізації впливає з психологічних закономірностей, відповідно до яких ефективність засвоєння підвищується, якщо наочність у навчанні виконує не тільки ілюстративну, але й когнітивну функцію, тобто використовуються когнітивні графічні навчальні елементи. У той же час «опори» (малюнки, схеми, моделі) компактно ілюструють зміст, сприяють системності знань. На думку З.І. Калмикової, абстрактний навчальний матеріал, перш за все, потребує конкретизації, і цій меті відповідають різні види наочності – від предметної до вельми абстрактної, умовно-знаковою. «При сприйнятті наочного матеріалу людина може охопити єдиним поглядом усі компоненти, що входять в ціле, простежити можливі зв'язки між ними, провести категоризацію за ступенем значущості, спільності, що є основою не тільки для більш глибокого розуміння сутності нової інформації, але і для її переказу в довгострокову пам'ять» [4].

У даний час широке поширення набув термін «візуальне мислення», тобто зорово-наочне, що означає, як пише Р. Арнхейм, «мислення за допомогою візуальних (зорових) операцій» [1].

Основну функцію візуального мислення психологи вбачають у його здатності впорядковувати значення образів. Р. Арнхейм вважає, що ніяку інформацію про предмет не вдасться безпосередньо передати, поки цей предмет не буде представлений у структурно ясній формі.

На відміну від вербального мислення, візуальне мислення носить явно виражений наочний характер.

Результати експериментів, проведених В.А. Крутецьким [5], показують, що створення образів об'єктів математики на основі їх наочних зображень (умовно-символічних записів, графіків) протікає неоднаково в різних учнів. Вже в процесі сприйняття графіка або запису алгебраїчного виразу виявляються яскраві індивідуальні відмінності. Одні учні детально фіксують всі їхні конкретні особливості (числові значення, вид змінних, особливості написання та ін.), а потім об'єднують їх в єдине ціле. Інші охоплюють загальну схему запису або графіка (характер зв'язків і відносин, послідовність операцій, форму кривої і т. д.), а потім як би наповнюють її деталями. Має місце своєрідна формалізація математичного матеріалу в процесі його сприйняття, розсуд в конкретному математичному виразі або завданню їх формальної структури, коли учень відволікається від конкретних значень і сприймає в першу чергу лише чисті відносини між величинами.

По-різному відбувається уявна обробка даних. Дослідженнями Є.Б. Шиянової [8] були виявлені своєрідні способи такої обробки. Одні учні відразу виділяють у записі (графіку) найбільш значущі для вирішення елементи, включають їх в різні системи розгляду, переосмислюють їх, об'єднують у комплекси, фіксують семантично більш важливі частини (знаки операцій, дужки, нахил кривої, її положення щодо початку координат і т. п.). Вони ніби одразу виділяють структуру запису, встановлюють суттєві співвідношення між її компонентами, незалежно від форми їх конкретного вираження і особливостей написання; виокремлюють своєрідні смислові математичні структури, тобто комплекси взаємопов'язаних, що знаходяться у функціональній залежності математичних величин, як єдине ціле, не втрачаючи при цьому з уваги всіх даних завдання, створюють на цій основі її цілісно-розчленований образ.

Інші учні роблять це повільно, поетапно, без чітких критеріїв аналізу, шляхом поелементного порівняння всіх знаків запису (графіка). Вони часто не можуть розпізнавати алгебраїчні об'єкти, які зображені нестандартно.

Як показують результати психологічних досліджень індивідуальні відмінності виявляються не тільки в характері сприйняття матеріалу, а й в легкості, свободі створення на його основі образів, оперування ними. Одні школярі добре «бачать» образ і можуть їм вільно маніпулювати в думках, не звертаючись до вихідної наочної опори, тобто, однаково добре фіксують образ і перетворюють його. Інші учні відчують у цьому великі труднощі. Деякі школярі не можуть довго утримувати в пам'яті складні образи записів (графіків) – вони як би розсипаються, розпливаються, втрачають свою структуру. Для таких учнів характерне постійне звернення до наочної опори. Вони по кілька разів переписують заданий вираз, застосовують спеціальні прийоми, що допомагають відновлювати і зберігати різні частини запису (графіка). Деякі школярі допускають повторення вже виконаних операцій, не помічають пропуску деяких операцій, плутають послідовність їх здійснення. Помилки такого роду пов'язані з

труднощами оперування образом схеми розв'язання, тобто набором операцій у певній послідовності.

Н.А. Резник [6] з багатьох питань, пов'язаних з формуванням навчального середовища нового типу, виділяє:

- роль зору, як інструмента, що відповідає за сприйняття та обробку інформації, що надходить;
- поліграфічні прийоми, що забезпечують продуктивну роботу зору;
- методичне забезпечення цього середовища;
- організацію гіпертекстових зв'язків та інтерактивних режимів роботи в такому середовищі.

Реалізація когнітивно-візуального підходу передбачає створення візуального навчального середовища – сукупності умов навчання, у яких акцент ставиться на використанні резервів візуального мислення. Ці умови передбачають наявність як традиційних наочних засобів, так і спеціальних засобів і прийомів, що дозволяють активізувати роботу зору з метою отримання продуктивних результатів. До основних вимог у конструюванні візуального навчального середовища відносять:

- лаконічність подання інформації;
- точність відтворення її структури і елементів;
- акценти на головні деталі образів;
- використання різного уявлення навчальних знань (геометричного, символічного, словесного);
- облік можливостей та індивідуальних особливостей в сприйнятті візуальної інформації.

Когнітивно-візуальний підхід спрямований на виховання «математичного зору». Учитель повинен постійно піклуватися про організацію зорової інформації, а учень повинен навчитися аналізу цієї візуальної інформації.

Сутність технології візуалізації навчання зводиться до цілісного поєднання трьох позицій:

- 1) систематичне використання в навчальному процесі візуальних моделей або їх сполучень;
- 2) навчання учнів раціональним прийомам «стиснення» інформації та її когнітивно-графічного подання;
- 3) методичні прийоми включення у навчальний процес візуальних моделей.

Робота з ними має чіткі етапи і супроводжується ще цілим рядом прийомів і принципів методичних рішень.

Таким чином, у педагогічних дослідженнях значна роль приділяється візуалізації навчальної інформації. Педагоги розглядають різні підходи та розробляють методики щодо використання візуалізації у навчальному процесі з метою оптимізації витрат часу на сприйняття і засвоєння інформації і тим самим підвищення ефективності навчально-пізнавальної діяльності суб'єктів навчання.

Список використаних джерел

1. Арнхейм Р. Візуальное мышление // Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 97–107.
2. Вербицький А.А. Активне навчання у вищій школі: контекстний підхід: Методичний посібник. / А.А. Вербицький. – М.: Вищ. шк., 1991. – 207 с.

3. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении (логико-психологические проблемы построения предметов) / В.В. Давыдов. – М., Педагогика, 1972.
4. Калмыкова З.И. Развивает ли продуктивное мышление система обучения В.Ф. Шаталова? // Вопросы психологии. – 1987. – №2. – С. 71-80.
5. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 432 с.
6. Резник Н. А. Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления: Дис. на соиск. уч. степ, докт. пед. наук. – Мурманск, 1997.
7. Шаталов В.Ф. Навчати всіх, навчати кожного // Педагогічний пошук. – К.: Рад. школа, 1988. – С.127.
8. Шиянова Е. Б. Индивидуальные различия в образном мышлении школьников при усвоении алгебры // Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся / Под. ред. И. С. Якиманской; Науч.-исслед. ин-т общей и педагогической психологии Академии пед. наук СССР. – М.: Педагогика, 1989. – С. 95–112.
9. Эрдниев П.М. Системность знаний и укрепление дидактической единицы //Сов. Педагогика. – 1975. – №4. – С. 72-80.
10. Семеніхіна О.В. Про реформування вищої педагогічної освіти в галузі математики // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – Суми : Вид-во СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2014. – №5 (39). – С. 347-353.
11. Семеніхіна О., Юрченко А. Уміння візуалізувати навчальний матеріал засобами мультимедіа як фахова компетентність учителя // Науковий вісник Ужгородського національного університету: Серія «Педагогіка. Соціальна робота». – Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла». – Випуск 33. – 2014. – С. 176-179.
12. Elena Semenikhina. Development of Dynamic Visual Skills SKM MAPLE among Future Teachers // European Journal of Contemporary Education. – 2014. – Vol.(10), № 4. – Pp. 265-272. (http://ejournal1.com/journals_n/1417761453.pdf)

Анотація. Шевченко І. Проблема візуалізації навчального матеріалу у педагогічних дослідженнях.

У статті проаналізовано різні підходи до визначення візуалізації навчальної інформації. Представлено авторів, які працювали над проблемою візуалізації у педагогічних дослідженнях. Розкрито сутність когнітивно-візуального підходу при поданні навчальної інформації.

Ключові слова: візуалізація навчальної інформації, візуальне мислення, когнітивно-візуальний підхід.

Abstract. Shevchenko I. The problem of visualization of educational material in educational research.

This paper examines different approaches to the study of information visualization. Presented by authors who have worked on the problem of visualization in educational research. The essence of cognitive visual approach when presenting educational information.

Keywords: educational information visualization, visual thinking, cognitive visual approach.

Алфавітний покажчик

Авраменко І.	5	Москальова О.	72
Бамбенкова Ю.	9	Півень Н.	77
Безуглий Д.	15	Прасок А.	81
Бондар І.	21	Солошенко А.	86
Гризун В.	24	Ткаченко О.	90
Гурба А.	28	Трохимець Д.	94
Завалій Т.	33	Тхоренко А.	99
Заточна А.	124	Чайкіна Т.	104
Зубко В.	37	Чижикова Ю.	112
Каца М.	41	Шамрай С.	129
Коропець Ю.	44	Шевченко І.	139
Кушнерьов О.	50, 56	Шевченко С.	115
Мащенко Г.	60	Шепель А.	119
Межирицька М.	68		

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА

Збірник наукових праць

ВИПУСК 1 (7)

Друкується в авторській редакції
Матеріали подані мовою оригіналу

Відповідальний за випуск
О.В. Семеніхіна

Комп'ютерна верстка
О.М. Удовиченко

Фізико-математичний факультет
СумДПУ імені А.С. Макаренка
вул. Роменська, 87
м. Суми, 40002
тел. (0542) 68 59 10

<http://fizmatsspu.sumy.ua>